

# 応用複素関数 第9回

## ～ 流体力学への応用 (3) ～

かつらだ まさし  
桂田 祐史

2026年6月16日

- ① 本日の内容・連絡事項
- ② 流体力学への複素関数の応用 (続き)
  - 簡単な関数の表す流れ
    - 一様流
    - 湧き出しと吸い込み
    - 渦糸 (点渦)
    - Mathematica で可視化する
  - 流れの合成
    - 一様流と湧き出しの重ね合わせ — ある無限物体をよぎる流れ
    - 同じ強さの湧き出し・吸い込みの対
    - 同じ強さ反対向きの渦の対
    - ランキンの卵形 (Rankine body)
    - 2重湧き出し (doublet)
    - 円柱を過ぎる一様流
- ③ 参考文献

今井 [1] (第 4 章 §27, 28), [2] (第 II 部第 1 章 §3, 4), [3], 巽 [4] (§8)

# 複素関数の可視化 (流体の話から離れて)

複素関数  $f$  の実部・虚部をそれぞれ  $u, v$  として、それらの等高線を描くことを考える。

$u$  と  $v$  が微分可能なとき、 $f$  が正則であるためには

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

という Cauchy-Riemann 方程式を満たすことが必要十分である、という定理があった。

ゆえに任意の正則関数  $f$  について

$$\text{grad } u \cdot \text{grad } v = u_x v_x + u_y v_y = u_x(-u_y) + u_y u_x = 0$$

であるから、**実部  $u$ , 虚部  $v$  の等高線は互いに直交している。**

(復習:  $\text{grad } \phi$  は  $\phi$  の等高線 ( $\phi(x, y) = c$ ) の法線ベクトルである。)

複素関数の有名なテキストである Ahlfors [5] では、初等関数の実部・虚部の等高線がどうなっているか、紙数を惜しまずに具体例をあげて説明してある。

(小さな文字で流体の話に戻すと 等ポテンシャル線と流線は直交する、ということ。)

## 5.15 簡単な関数の表す流れ 5.15.1 一様流

1 次関数  $f(z) = cz$ ,  $c = p - iq$  (ただし  $p, q \in \mathbb{R}$ ) のとき、

$$f(x + yi) = (p - iq)(x + yi) = px + qy + i(-qx + py),$$

$$\phi(x, y) = \operatorname{Re} f(x + yi) = px + qy,$$

$$\psi(x, y) = \operatorname{Im} f(x + yi) = -qx + py.$$

等ポテンシャル線 ( $\phi = \text{const.}$ ) も、流線 ( $\psi = \text{const.}$ ) も平行直線群であり、(もちろん) それらは互いに直交する。

$$u - iv = f' = c = p - iq.$$

**復習:** 正則関数  $f$  の定める速度場の成分を  $u, v$  とすると、 $f' = u - iv$ .

ゆえに  $f$  を複素速度ポテンシャルとする流れの速度場は

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

これは定数である。そのため (場所によらないため) **一様流** と呼ばれる。

## 5.15.1 一様流 続き

等ポテンシャル線 ( $\phi(x, y) = px + qy = \text{const.}$ ) も、流線 ( $\psi(x, y) = -qx + py = \text{const.}$ ) も平行直線群であり、(もちろん) それらは互いに直交する。

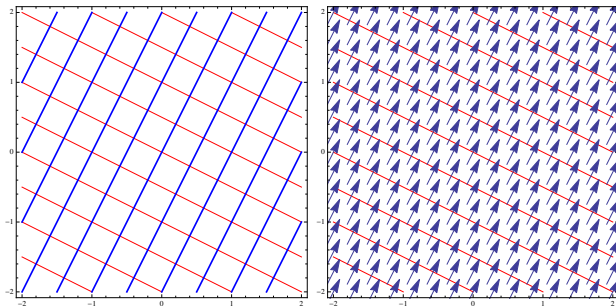


図 1: 一様流の等ポテンシャル線 (赤)、流線 (青) と速度ベクトル:  $(p, q) = (1, 2)$

## 5.15.2 湧き出しと吸い込み

$m \in \mathbb{R}$ ,  $f(z) = m \log z$  ( $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ). この  $f$  は ( $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  では) 多価関数なので、気持ちが悪いが、分枝は定数差しかなく、微分すると一価である。

$z = re^{i\theta}$  ( $r \geq 0, \theta \in \mathbb{R}$ ) とすると

$$f(re^{i\theta}) = m(\log r + i\theta) = m \log r + im\theta.$$

速度ポテンシャルと流れ関数は

$$\phi(x, y) = \operatorname{Re} f(z) = m \log r, \quad \psi(x, y) = \operatorname{Im} f(z) = m\theta.$$

等ポテンシャル線 ( $\phi = m \log r = \text{定数}$ ) は原点を中心とする同心円群、流線 ( $\psi = m\theta = \text{定数}$ ) は原点を始点とする半直線群である (もちろん互いに直交)。一方

$$u - iv = f'(z) = \frac{m}{z} = \frac{m}{re^{i\theta}} = \frac{m}{r} (\cos \theta - i \sin \theta).$$

ゆえに流れの速度場は

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m}{r} \cos \theta \\ \frac{m}{r} \sin \theta \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{v}$  の方向は、 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$  と同じ。

$m > 0$  ならば向きも同じ (湧き出し)、 $m < 0$  ならば向きは逆 (吸い込み)。

$\mathbf{v}$  の大きさ  $|\mathbf{v}|$  は  $\frac{|m|}{r}$  で、原点からの距離に反比例している。

## 5.15.2 湧き出しと吸い込み (続き)

原点を正の向きに一周する閉曲線  $C$  に対し、 $C$  から外に湧き出る流量は

$$\int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds = \text{Im} \int_C f'(z) dz = \text{Im} \int_C \frac{m}{z} dz = 2\pi m \quad (C \text{ によらない}).$$

この流れは、 $m > 0$  ならば原点においた**湧き出し** (source),  $m < 0$  ならば原点に置いた**吸い込み** (sink) と呼ばれる。

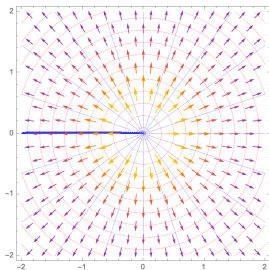


図 2: 湧き出しの等ポテンシャル線, 流線, 速度場

負の実軸は、 $f$  のいわゆる branch cut (分岐截線)

### 5.15.3 渦糸 (点渦)

$\kappa \in \mathbb{R}$ ,  $f(z) = i\kappa \log z$  ( $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ) ... ( $i$ がかかっている).

$z = re^{i\theta}$  ( $r \geq 0, \theta \in \mathbb{R}$ ) とすると

$$f(re^{i\theta}) = i\kappa(\log r + i\theta) = -\kappa\theta + i\kappa \log r,$$

速度ポテンシャルと流れ関数は

$$\phi(x, y) = \operatorname{Re} f(z) = -\kappa\theta, \quad \psi(x, y) = \operatorname{Im} f(z) = \kappa \log r.$$

等ポテンシャル線 ( $\phi = -\kappa\theta = \text{一定}$ ) は原点を始点とする半直線群、流線 ( $\psi = \kappa \log r = \text{一定}$ ) は原点を中心とする同心円群。

$$u - iv = f'(z) = \frac{i\kappa}{z} = \frac{i\kappa}{r} (\cos \theta - i \sin \theta) = \frac{\kappa}{r} (\sin \theta + i \cos \theta).$$

ゆえに流れの速度場は

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{\kappa}{r} \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{v}$  の方向は  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  を  $-\frac{\pi}{2}$  回転した方向である。

$\kappa > 0$  ならば向きも同じ (時計回り)、 $\kappa < 0$  ならば向きは逆 (反時計回り)。

$\mathbf{v}$  の大きさは  $\frac{|\kappa|}{r}$  で、原点からの距離に反比例する。

## 5.15.3 渦糸 (点渦) 続き

この流れは、原点に置かれた<sup>うずいと</sup>渦糸 (vortex filament, vortex string) または<sup>てんうず</sup>点渦 (point vortex) と呼ばれる (前者は 3 次元的, 後者は 2 次元的なイメージ)。

渦度は  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  全体で 0. (渦度が原点に集中していて他は渦なし、と考えるべきかもしれない。)

**問**  $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$  (in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ) を確かめよ ( $f$  は一価正則でなく、前回の説明の範疇には収まらないので、念のため確認)。

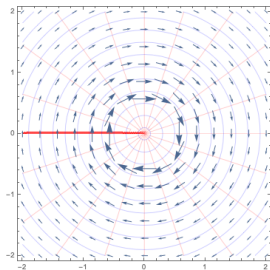


図 3: 点渦の等ポテンシャル線, 流線, 速度場

## 5.15.4 Mathematica で可視化する

以上の単純な場合は、紙とペンでも十分理解可能であるが、この辺で文明の利器を。

コマンドをコピペできると便利なので、この部分の資料は WWW に置く。

「簡単な正則関数を複素速度ポテンシャルとする流れの可視化」  
[https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2/fluid\\_mathematica/](https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2/fluid_mathematica/)

ここはあわてないでゆっくりやること。

## 5.16 流れの合成

2つの2次元渦なし非圧縮流があり、速度場をそれぞれ  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ , また複素速度ポテンシャルを  $f_1, f_2$  とする。このとき  $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$  を速度場とする流れは、やはり2次元渦なし非圧縮流であり、その複素速度ポテンシャルは  $f_1 + f_2$  である。

実際、

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}_1 = \operatorname{rot} \mathbf{v}_2 = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_1 = \operatorname{div} \mathbf{v}_2 = 0$$

であれば

$$\operatorname{rot} (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = 0,$$

$$\operatorname{div} (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = 0,$$

$$\begin{aligned} (f_1 + f_2)' &= f_1' + f_2' = (u_1 - iv_1) + (u_2 - iv_2) \\ &= (u_1 + u_2) - i(v_1 + v_2). \end{aligned}$$

流れを合成 (重ね合わせ) するには、複素速度ポテンシャルを足せば良い

### 5.16.1 一様流と湧き出しの重ね合わせ — ある無限物体をよぎる流れ

$U, m > 0$  とする。一様流  $f_1(z) = Uz$  と、湧き出し  $f_2(z) = m \log z$  の重ね合わせの複素速度ポテンシャルは

$$\begin{aligned} f(z) &= f_1(z) + f_2(z) \\ &= Uz + m \log z = Ur \cos \theta + m \log r + i(Ur \sin \theta + m\theta). \end{aligned}$$

ゆえに流れ関数は

$$\psi = Ur \sin \theta + m\theta.$$

$\theta = 0$  とすると  $\psi = 0$ , また  $\theta = \pi$  とすると  $\psi = m\pi$  であるから、これらは  $\psi$  の等高線である。ゆえに実軸 (原点を除く) は流線である。

また  $\theta \in (0, 2\pi)$ ,  $\theta \neq \pi$  とすると

$$(1) \quad \psi = m\pi \Leftrightarrow Ur \sin \theta + m\theta = m\pi \Leftrightarrow r = \frac{m(\pi - \theta)}{U \sin \theta} \Leftrightarrow r = \frac{m}{U} \cdot \frac{\varphi}{\sin \varphi}.$$

ただし  $\varphi := \pi - \theta$ .

$\theta \in (0, \pi)$  ( $\varphi \in (0, \pi)$ ) と  $\theta \in (\pi, 2\pi)$  ( $\varphi \in (-\pi, 0)$ ) で分けて考える。

## 5.16.1 一様流と湧き出しの重ね合わせ — ある無限物体をよぎる流れ

実はこれは右方向に無限に伸びる U 字型の曲線である<sup>1</sup>。流体が非粘性流体の場合、これを壁面とする物体を (U 字形領域に) 入れても、流れは影響を受けない。ゆえに、この流れは、その形の物体をよぎる流れを表している。

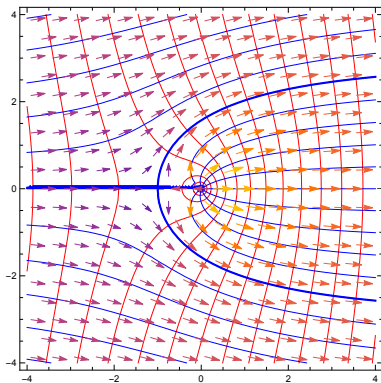


図 4: 一様流と湧き出しの重ね合わせ (太線は  $\psi = \pm m\pi$ )

## 5.16.2 同じ強さの湧き出し・吸い込みの対

$z = a$  に置いた強さ  $m$  の湧き出し、 $z = -a$  に置いた強さ  $m$  の吸い込みを重ね合わせる。

$$f(z) := m \log(z - a) - m \log(z + a) = m \log \frac{z - a}{z + a}.$$

(途中で分枝が気になるが、右辺は  $\mathbb{C} \setminus [-a, a]$  で一価正則である！)

分子、分母の  $z$  を、それぞれ  $z = a + r_1 e^{i\theta_1}$ ,  $z = -a + r_2 e^{i\theta_2}$  で置き換えると

$$f(z) = m((\log r_1 + i\theta_1) - (\log r_2 + i\theta_2)) = m \log \frac{r_1}{r_2} + im(\theta_1 - \theta_2).$$

等ポテンシャル線の方程式は  $\frac{r_1}{r_2} = \text{定数}$ . アポロニウスの円を表す。

流線の方程式は  $\Theta := \theta_1 - \theta_2 = \text{定数}$ .  $\Theta$  は  $a, -a$  から点  $z$  を見込む角であるので、2点  $\pm a$  を結ぶ線分を弦とする円弧である (円周角の定理の逆による)。

## 5.16.2 同じ強さの湧き出し・吸い込みの対 (続き)

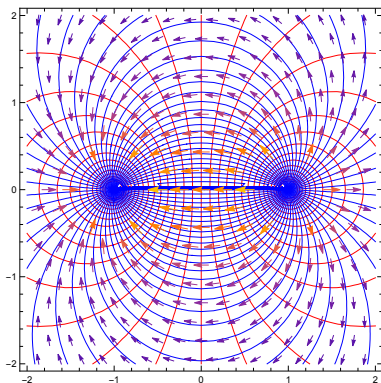


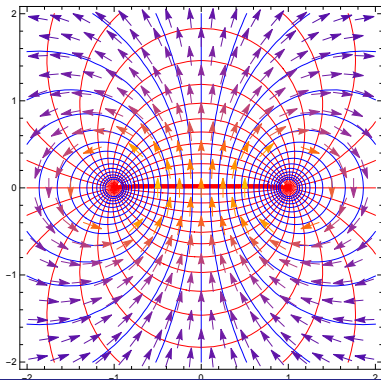
図 5: 同じ強さの湧き出しと吸い込みの重ね合わせ

### 5.16.3 同じ強さ反対向きの渦の対

等しい強さを持ち、回転の向きが反対の点渦を  $z = a, -a$  に置いて重ね合わせた流れの複素速度ポテンシャルは

$$f(z) := i\kappa \log \frac{z - a}{z + a}.$$

等ポテンシャル線、流線の方程式はそれぞれ  $\theta_1 - \theta_2 = \text{定数}$ ,  $\frac{r_1}{r_2} = \text{定数}$  で、どちらも円を表す。



## 5.16.4 ランキンの卵形 (Rankine body)

$U, m, a > 0$  とする。一様流  $f_1(z) = Uz$ ,  $-a$  に置いた湧き出し  $f_2(z) = m \log(z + a)$ ,  $a$  に置いた吸い込み  $f_3(z) = -m \log(z - a)$  を重ね合わせる。

$$f(z) := Uz + m \log(z + a) - m \log(z - a) = Uz + m \log \frac{z + a}{z - a}.$$

流れ関数は

$$\psi = Uy - m(\theta_1 - \theta_2) = Uy - m \tan^{-1} \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}.$$

実軸  $y = 0$  では、 $\psi = 0$  であるから、実軸は1つの流線である。また

$$\psi = 0 \Leftrightarrow y = \frac{m}{U} \tan^{-1} \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}.$$

この方程式は卵形の曲線を表す。これを **Rankine の卵形** (the Rankine body) と呼ぶ。

## 5.16.4 ランキンの卵形 (Rankine body) 続き

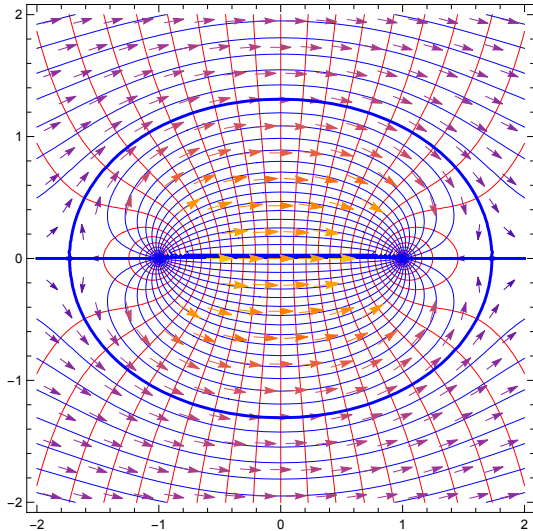


図 7: Rankine の卵形 (同じ強さの湧き出し・吸い込みと一様流の重ね合わせ)

## 5.16.5 2重湧き出し (doublet)

同じ強さの湧き出し・吸い込み対の流れの複素速度ポテンシャルは

$$f(z) = m \log(z - a) - m \log(z + a).$$

$\mu > 0$  を取り、 $2am = \mu$  という関係式を保ったままで、 $a \rightarrow 0$  とした極限を考えよう。

$$\begin{aligned} f(z) &= m \log(z - a) - m \log(z + a) = -\mu \frac{\log(z + a) - \log(z - a)}{2a} \\ &\rightarrow F(z) := -\mu \frac{d}{dz} \log z = -\frac{\mu}{z} = \frac{-\mu x}{x^2 + y^2} + i \frac{\mu y}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

$F$  を複素速度ポテンシャルとする流れを**二重湧き出し** (doublet) と呼ぶ。

## 5.16.5 2重湧き出し (doublet) (続き)

$F(z) := -\frac{\mu}{z}$  の定める流れの等ポテンシャル線は、実軸上に中心を持ち原点を通る円、または虚軸 (原点を除く) である。

一方、流線は、虚軸上に中心を持ち原点を通る円または実軸 (原点を除く) である。

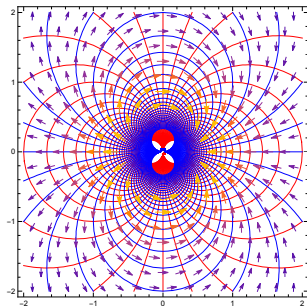


図 8: 二重湧き出し (同じ強さの湧き出し・吸い込みの極限)

## 5.16.6 円柱を過ぎる一様流

ランキンの卵形で  $2am = \mu$  (正定数) として  $a \rightarrow 0$  としてみよう (二重湧き出しと一様流との重ね合わせ、とも言える)。

$$f(z) = Uz + \frac{\mu}{z} = U \left( z + \frac{R^2}{z} \right), \quad R := \sqrt{\mu/U}.$$

$$f(re^{i\theta}) = U \left( r \cos \theta + i \sin \theta + \frac{R^2}{r} (\cos \theta - i \sin \theta) \right)$$

であるから、速度ポテンシャル  $\phi$  と流れ関数  $\psi$  は

$$\phi = U \left( r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \theta, \quad \psi = U \left( r - \frac{R^2}{r} \right) \sin \theta.$$

特に円周  $r = R$  上で  $\psi = 0$  であるから、 $r = R$  は流線である。

## 5.16.6 円柱を過ぎる一様流 (続き)

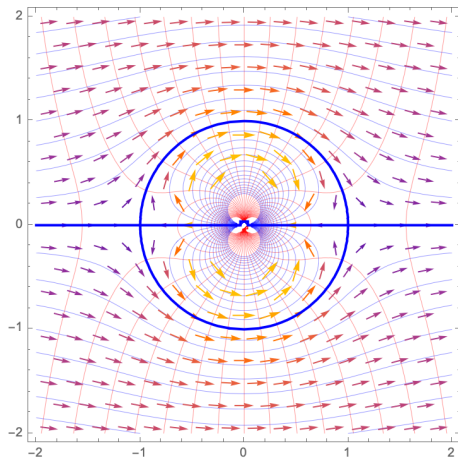


図 9: 円柱を過ぎる一様流

完全流体の一様流の中に円柱を入れると

2026/6/16 の講義でここまで行きますように。

- [1] 今井功：流体力学 前編, 裳華房 (1973/11/20), 流体力学の基本的文献。後編は書かれなかった。  
<https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000108663>.
- [2] 今井功：複素解析と流体力学, 日本評論社 (1981/10/20, 1989/4/1).
- [3] 今井功：等角写像とその応用, 岩波書店 (2013/9/10).
- [4] たつみともまさ 巽 友正：流体力学, 培風館 (1982/4/15).
- [5] Ahlfors, L. V.: *Complex Analysis*, McGraw Hill (初版は 1953 で、最新版である Third Edition は 1979/1/1? 私は 1979 年の秋に購入した).