応用複素関数 第 7 回

～ 流体力学への応用 (1) ～

かつらだ まさし
桂田 祐史

2026 年 6 月 2 日

目次

1. 本日の内容・連絡事項
2. 流体力学への複素関数の応用
    - はじめに
    - 流体の運動の表現　何を求めれば良いか
    - 流体力学の方程式 (1) 連続の方程式
    - 物質微分
    - 応力
    - 完全流体, 粘性流体, 非圧縮流体
    - 流体力学の方程式 (2) 運動方程式
    - 流体の境界条件
    - おまけ: 重力下の静水圧
    - おまけ: 粘性率、動粘性率の具体値
    - 渦度　駆け足の説明
    - ポテンシャル流
        - ポテンシャル, 渦無し
3. 参考文献

本日の内容・連絡事項

- 流体力学の方程式を紹介する。講義ノートとして桂田 [1], 参考書として今井 [2] をあげておく。
- しばしばベクトル解析を用いる。ベクトル解析を未修の人は適当な機会に学ぶことを勧めるが、とりあえず桂田 [3], [4] 紹介しておく。

流体 (**fluid**) とは、液体, 気体のように定まった形を持たず、「流れる」ものを理想化したものである。
(Cf. 質点, 質点系, 剛体, 弾性体, ⋯)

- 流体のかかわる現象は非常に多く、応用上重要である。
- 流体は、圧縮性と粘性の有無で分類される。
- 流体の運動の決定については、数学的には解の存在・一意性すら未解決問題である。(ほとんどが非線形問題になり取り扱いが難しい。)

次のことが言える。

2 次元の非圧縮流体の渦なしの流れ $=$ 正則関数

この意味を理解して、その場合に応用できるようになることが、応用複素関数の (1 つの) 目標である。

5.1 はじめに (続き)

流体力学の定番本として、今井 [5], 巽 [6] をあげておく。関数論の応用については、今井 [2] がある。

必要な数学として、関数論、ベクトル解析、偏微分方程式の基本的な知識をあげておく (一応この授業で説明)。

5.2 流体の運動の表現　何を求めれば良いか

流体の状態は、ふつう次のものを求めることで定まる。ただし $\boldsymbol{x} = (x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$ は位置, t は時刻を表す。

- 速度 (velocity) $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

  ($\boldsymbol{v}$ の代わりに $\boldsymbol{u}$ という字を使うことも多い。)
- 圧力 (pressure) $p(\boldsymbol{x}, t)$
- 密度 (density) $\rho(\boldsymbol{x}, t)$
- 温度 (temperature)　今回は考えない。

問　水と空気のおおよその密度は？ (この PDF の最後に答えがある。)

解答　水は 1 ml で 1 g とすれば、$\rho = 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$ である。

空気については、高校の化学の知識で、1 mol は 22.4 ℓ であること、80% が窒素 (分子量 28)、20% が酸素 (分子量 32) であることを用いると、$\rho = 1.3\ \mathrm{kg/m^3}$ となる。

5.3 流体力学の方程式 (1) 連続の方程式

質量が保存されることから、一般に次式が成立する。これを**連続の方程式** (continuity equation) と呼ぶ。

(1)
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0.$$

証明 (あらすじ)　流体内の任意の領域 V にしめる流体の質量の時間変化率を考えると、質量保存則から

(2)
$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\, d\boldsymbol{x} = -\int_{\partial V} \rho \boldsymbol{v}\cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma.$$

ただし $\boldsymbol{n}$ は ∂V の点における外向き単位法線ベクトルで、$d\sigma$ は面積要素、∂V は V の境界である。

(2) の右辺の意味や、次の Gauss の発散定理については、例えば桂田 [3], [4] を見よ。

左辺に積分記号下の微分 (微分と積分の順序交換)、右辺に Gauss の発散定理を使うと

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\boldsymbol{x} = -\int_V \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) d\boldsymbol{x}.$$

V は任意であるから

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0. \quad \square$$

5.4 物質微分 (1) 定義

積の微分法から $\mathrm{div}(\rho \boldsymbol{v}) = \mathrm{grad}\,\rho \cdot \boldsymbol{v} + \rho\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}$ が成り立つので、連続の方程式は次のように書ける。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\rho + \rho\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0 \tag{3}$$

物質微分 (material derivative, Lagrange derivative) と呼ばれる作用素 $\frac{D}{Dt}$ を次式で定義する:

$$\frac{D}{Dt} := \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial t} + v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial}{\partial x_3}. \tag{4}$$

これを使うと (3) は次のように表せる。

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0 \tag{5}$$

ベクトル値関数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)=\begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{x},t) \\ f_2(\boldsymbol{x},t) \\ f_3(\boldsymbol{x},t) \end{pmatrix}$ に対しても

$$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{f} := \begin{pmatrix} (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)f_1 \\ (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)f_2 \\ (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)f_3 \end{pmatrix}, \quad \frac{D\boldsymbol{f}}{Dt} := \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} \dfrac{Df_1}{Dt} \\ \dfrac{Df_2}{Dt} \\ \dfrac{Df_3}{Dt} \end{pmatrix} \tag{6}$$

と定義する。

(これを定義しておかないと、加速度の議論が出来ない…すみません。)

5.4 物質微分 (2) 意味

流体の流れに沿って運動するある粒子 (観測者) の位置を $\boldsymbol{x}(t)$ とする。すなわち

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}(t)=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}(t),t)$$

が成り立つ。このとき、任意の関数 $f(\boldsymbol{x},t)$ に対して

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}),t)&=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}(t),t)x_j'(t)+\frac{\partial f}{\partial t}(\boldsymbol{x}(t),t)\\&=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}(t),t)v_j(\boldsymbol{x}(t),t)+\frac{\partial f}{\partial t}(\boldsymbol{x}(t),t)=\frac{Df}{Dt}(\boldsymbol{x}(t),t)\end{aligned}$$

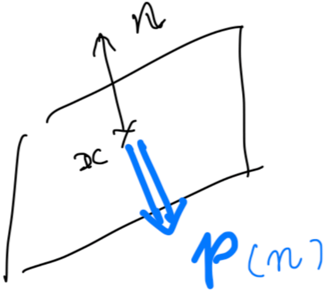
が成り立つ。

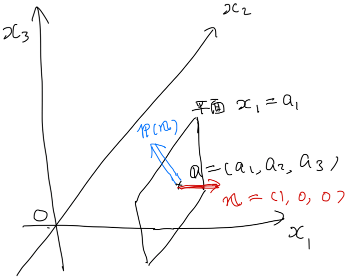
注意　流体粒子の速度は、位置 $\boldsymbol{x}$ と時刻 t が分かれば $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$ で与えられるが、その加速度は $\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}$ でなく、$\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}$ である。よく考えてみよう。

流体の運動を考えるため、Cauchy は次の仮定をおいた。

流体が接触することで及ぼす力は面積に比例する。面積あたりの力は、位置 x, 時刻 t, 面の向き (普通は外向き単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ で指定する) で定まる (**Cauchy の応力原理**)。

この面積あたりの力を**応力** (stress) と呼ぶ。





5.5 応力 (2) 応力テンソル

しばらく、$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$, $t=\tau$ と固定し、応力 $\boldsymbol{p}$ を $\boldsymbol{n}$ の関数と考える: $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}(\boldsymbol{n})$.

点 $\boldsymbol{a}$ を通る平面 $x_i=a_i$ を通して、正の側が負の側におよびす力を $\begin{pmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \\ p_{i3} \end{pmatrix}$ とおく。これは $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{e}_i)$ である。

$$P := (p_{ij}) = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$ を**応力テンソル** (stress tensor) と呼ぶ。

次のことが成り立つ (証明は省略)。

- P は対称である: $P^\top = P$ つまり $p_{ij}=p_{ji}$.
- $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{n}) = P\boldsymbol{n}$. $\quad (\boldsymbol{p}(\boldsymbol{n}) = P^\top\boldsymbol{n}$ と書く本もある。)

次式は覚えておくこと。

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{n}) = P\boldsymbol{n}. \tag{7}$$

5.5 応力 (3) 応力テンソルの具体形

適当な仮定をおくと、応力テンソルの具体形が定まる。

Stokes (1819–1903) は、流体についての仮定を整理して **Stokes の流体公理**にまとめた (一様、等方、$E=0$ のとき $P=-pI$ 等々)。それから

$$P=\alpha I+\beta E+\gamma E^2$$

が導かれる。ここで I は単位テンソル, E は

$$E=(e_{ij}),\quad e_{ij}:=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{8}$$

で定められ、**歪み (速度) テンソル** (strain rate tensor) あるいは**変形速度テンソル**と呼ばれる。

さらに **Newton 流体の仮定** (P は E の 1 次式) をおくと、

$$P=(-p+\lambda\operatorname{div}\boldsymbol{v})\,I+2\mu E \tag{9}$$

を得る (導出は岡本・中村 [7] に載っている)。ここで λ, μ は非負定数、$p=p(x,t)$ はスカラー関数である。

5.6 完全流体, 粘性流体, 非圧縮流体 (1)

以下では、Newton 流体の仮定を満たす流体を考える。

μ は**粘性率** (**粘性係数**, **粘度**, viscosity) と呼ばれる非負定数である。

- $\mu = 0$ である流体を**完全流体** (perfect fluid), あるいは**非粘性流体** (inviscid fluid) と呼ぶ。
- $\mu > 0$ である流体を**粘性流体** (viscous fluid) と呼ぶ。

一方、$\frac{D\rho}{Dt} = 0$ を満たす流体を**非圧縮流体**と呼ぶ。一般に連続の方程式 $\frac{D\rho}{Dt} + \rho\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0$ が成り立つので、この条件は次の方程式と同値である。

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0 \quad (\textbf{非圧縮条件の方程式}) \tag{10}$$

($\because$ 連続の方程式のうち $\frac{D\rho}{Dt} + \rho\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0$ という形のものを見れば分かる。)

非圧縮条件を満たす Newton 流体の応力テンソルは、次式を満たす。

$$P = -pI + 2\mu E. \tag{11}$$

5.6 完全流体, 粘性流体, 非圧縮流体 (2) 有名な場合

非圧縮流体が、静止している場合 ($\boldsymbol{v} = 0$) や、粘性がない場合 ($\mu = 0$) においては ($\mu E = 0$ であるので)

$$P = -pI = -\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}.$$

ゆえに

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{n}) = P\boldsymbol{n} = -p\boldsymbol{n}.$$

応力は面に垂直 ($\boldsymbol{p} \parallel \boldsymbol{n}$)、押される向きで (外向き単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ と逆向き)、大きさは $p = p(\boldsymbol{x}, t)$ で $\boldsymbol{n}$ にはよらない。

学校の理科で、止まっている水の力学として聞いたことがあるかもしれない。

5.7 流体力学の方程式 (2) 運動方程式 (1) 一般形

Cauchy の応力原理を認めると、外力がない場合 (流体が流体の応力だけで運動する場合)、一般に次の方程式が成立する。

(12) $$\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}=\frac{1}{\rho}\operatorname{div}P \quad (\text{流体の運動方程式}).$$

ただし

(13) $$\operatorname{div}P:=\begin{pmatrix}\frac{\partial p_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial p_{12}}{\partial x_2}+\frac{\partial p_{13}}{\partial x_3}\\ \frac{\partial p_{21}}{\partial x_1}+\frac{\partial p_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial p_{23}}{\partial x_3}\\ \frac{\partial p_{31}}{\partial x_1}+\frac{\partial p_{32}}{\partial x_2}+\frac{\partial p_{33}}{\partial x_3}\end{pmatrix} \quad (\text{行ごとに div})$$

証明　流体内の仮想的な領域 V で運動方程式を立てると

$$\int_V \rho\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}\,d\boldsymbol{x}=\int_{\partial V}P\boldsymbol{n}\,d\sigma.$$

右辺のベクトルの第 i 成分に Gauss の発散定理を用いると

$$\int_{\partial V}(p_{i1}n_1+p_{i2}n_2+p_{i3}n_3)d\sigma=\int_{\partial V}\begin{pmatrix}p_{i1}\\p_{i2}\\p_{i3}\end{pmatrix}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma=\int_V\operatorname{div}\begin{pmatrix}p_{i1}\\p_{i2}\\p_{i3}\end{pmatrix}d\boldsymbol{x}=\int_V(\operatorname{div}P)_i\,d\boldsymbol{x}.$$

ゆえに $\displaystyle\int_V\rho\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}\,d\boldsymbol{x}=\int_V\operatorname{div}P\,d\boldsymbol{x}$. V は任意なので $\displaystyle\rho\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}=\operatorname{div}P.$ □

5.7 流体力学の方程式 (2) Newton 流体の場合の $\operatorname{div} P$

(既に述べたように) Newton 流体の公理を満たすとき

$$P = (-p + \lambda \operatorname{div} \boldsymbol{v})I + 2\mu E$$

が成り立つ。このとき $\operatorname{div} P$ を計算すると

$$\operatorname{div} P = -\nabla p + \mu \triangle \boldsymbol{v} + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{v}). \tag{14}$$

ただし

$$\triangle \boldsymbol{v} := \begin{pmatrix} \triangle v_1 \\ \triangle v_2 \\ \triangle v_3 \end{pmatrix}, \quad \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{v}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{v} \quad (\text{念のため}).$$

特に非圧縮流体では ($\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$ であるから)

$$\operatorname{div} P = -\nabla p + \mu \triangle \boldsymbol{v}. \tag{15}$$

これで準備はできた！

5.7 流体力学の方程式 (3) Navier-Stokes, Euler 方程式

非圧縮流体の運動方程式は次の形になる。

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\triangle\boldsymbol{v}. \tag{16}$$

これが非圧縮粘性流体の方程式として有名な**Navier-Stokes方程式**(ナヴィエ・ストークス)である。ただし

$$\nu := \frac{\mu}{\rho} \tag{17}$$

とおいた。ν を**動粘性率** (kinematic viscosity) と呼ぶ。

特に完全流体の場合は ($\mu = 0$ であるから)

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p. \tag{18}$$

これが非圧縮完全流体の方程式として有名な**Euler方程式**(オイラー)である。

(Euler 方程式は、左辺が加速度、右辺が "圧力勾配 (pressure gradient)" $\times(-1/\rho)$ で、割と分かりやすい。Navier-Stokes 方程式は、それに粘性による引きずる効果が入っている (少し分かりにくい)。)

5.7 流体力学の方程式 (4) Stokes 方程式

流速 ($|\boldsymbol{v}|$) が小さいとき、Navier-Stokes 方程式で、$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$ を無視して ($\boldsymbol{v}=0$ で線形化する、とも言える)

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \triangle \boldsymbol{v}. \tag{19}$$

を得る。これを **Stokes 方程式**と呼ぶ。粘性非圧縮流体の遅い流れの数学モデルとして採用される。

この他にも線形化したもの、圧縮性流体 (最近流行している) の場合など、色々あるが、運動方程式の話はこのくらいにしておく。

5.7 流体力学の方程式 (5) 練習の勧め

今日の授業は、ほとんどが単なるお話になってしまう嫌いがあると思われる。
流体力学をある程度きちんと学ぶ場合、次のような練習がおすすめ。

- (14) を確かめよ (導関数を計算するだけだが、ベクトル解析の記号の良い練習である)。
- Navier-Stokes 方程式をベクトル表記でなく、成分表記せよ ($(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$ はどういうものか、一度は書いてみよう)。
- Navier-Stokes 方程式を覚えてみよう。

5.8 流体の境界条件 (1) 粘着境界条件

解を求めるための問題設定をするとき、初期値境界値問題とするのが普通である。境界条件について説明する。

粘性流体では、固体の壁では

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{wall}} \quad (\text{壁の表面において}) \tag{20}$$

を満たすことが知られている ($\boldsymbol{v}_{\mathrm{wall}}$ は壁の速度)。特に固定壁では

$$\boldsymbol{v} = 0 \quad (\text{壁の表面において}) \tag{21}$$

を満たす。これを**粘着境界条件** (no-slip boundary condition) と呼ぶ。

数学的にはいわゆる Dirichlet 境界条件であり、扱いやすい。

5.8 流体の境界条件 (2) 滑り境界条件

一方

(22) $$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=0 \quad \text{かつ} \quad \boldsymbol{p}(\boldsymbol{n}) \parallel \boldsymbol{n} \quad (\text{境界において})$$

を**滑り境界条件** (slip boundary condition) と呼ぶ。速度の垂直成分が 0 (壁に沿って動く) で、応力が境界に垂直 (壁に沿う成分が 0) ということである。

計算するためには方程式で表現するのが望ましい。

$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{n}) \parallel \boldsymbol{n}$ は、3 次元では

$$P\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}=\mathbf{0}$$

と表せる。また 2 次元流 (まだ説明していない) では、領域の境界曲線の単位接線ベクトルを $\boldsymbol{t}$ として、次式で表せる。

$$P\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{t}=0.$$

注意 非粘性流体では、流体のしめる領域内で $P\boldsymbol{n} \parallel \boldsymbol{n}$ が成り立つ。$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=0$ が滑り境界条件である、とみなしている人が多い。

5.8 流体の境界条件 (3) その他

これ以外に、応力を指定する**応力境界条件**, **摩擦型滑り境界条件**, **摩擦型漏れ境界条件**など色々あるが、それは必要になったときに説明する。

5.9 おまけ: 重力下の静水圧 (1) $p=-\rho gz+p_0$

池 (水が静止している) の水圧を、Navier-Stokes 方程式を解いて調べよう (非圧縮性も仮定していることになる)。

一様な重力場を仮定する。$\boldsymbol{f}=\begin{pmatrix}0\\0\\-g\end{pmatrix}$ という単位質量あたりの外力 $\boldsymbol{f}$ を含めた

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\triangle\boldsymbol{v}+\boldsymbol{f}$$

が運動方程式になる。$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ であるから $\boldsymbol{0}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\boldsymbol{f}$. 成分で書くと

$$\frac{\partial p}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial p}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial p}{\partial z}=-\rho g.$$

水面を $z=0$ として、$z=0$ において、$p=p_0=$ 大気圧 とすると

$$p(\boldsymbol{x})=-\rho gz+p_0.$$

1 m 深く潜った (z を 1 減らした) ときの、圧力の増加分 Δp (Laplacian ではない) は

$$\Delta p=-\rho g(-1)=1.0\times 10^3\ \mathrm{kg/m^3}\times 9.8\ \mathrm{m/s^2}\times 1\ \mathrm{m}=9.8\times 10^3\ \mathrm{Pa}.$$

大気圧 $p_0=1013\ \mathrm{hPa}=1.013\times 10^5\ \mathrm{Pa}$ であるから、Δp は大気圧 p_0 の 10% くらいである。だから 10 m 潜ったとき、$\Delta p \fallingdotseq p_0$ となる訳である。

この問題は素朴な考え方で「解ける」ので、大げさな解き方のように思えるが、我々は導出した方程式をもとに考えようとしているので、無駄なことではない。

一様な重力場の下での池あるいは湖 (水が静止している) に物体 Ω を入れたとき、物体の表面は水から応力を受ける。その “合力” を求めよう。

$\operatorname{div} P + \rho \boldsymbol{f} = 0$ より

$$\operatorname{div} P = -\rho \boldsymbol{f} = -\rho \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho g \end{pmatrix}.$$

ゆえに水から受ける応力の合計は

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{p}(\boldsymbol{n}) d\sigma &= \int_{\partial\Omega} P\boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} P\, d\boldsymbol{x} \\ &= \int_{\Omega} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho g \end{pmatrix} d\boldsymbol{x} = \rho g \int_{\Omega} d\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{e}_3 = \rho \left|\Omega\right| g \boldsymbol{e}_3. \end{aligned}$$

ただし

$$\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\Omega| = \Omega \text{ の体積}.$$

$\rho\,|\Omega|$ は「物体が押しのける水の質量」で、$\rho\,|\Omega|\,g$ はその重さ (重力) である。つまり向きが鉛直方向の上向き ($\boldsymbol{e}_3$) で、大きさが「物体が押しのける水の重さ」に等しい力となる。これが**浮力**である。

5.10 おまけ: 粘性率、動粘性率の具体値

粘性率、動粘性率は、粘性の大きさを表す量であるが、わかりにくい。身近な流体の場合にどういう値を取るかくらい調べておこう。

問　水や空気では、粘性率、動粘性率はどういう値を取るか。温度は 20 度とする。

答　水の場合

$$\mu = 1.005 \times 10^{-3}\ \mathrm{Pa \cdot s}, \quad \nu = 1.0 \times 10^{-6}\ \mathrm{m^2/s}.$$

空気の場合

$$\mu = 1.83 \times 10^{-5}\ \mathrm{Pa \cdot s}, \quad \nu = 1.5 \times 10^{-5}\ \mathrm{m^2/s}. \quad \square$$

私は特に根拠なく、水の方が大きそうに思っていた。μ については確かにそうだが、ν については逆転している (水の ρ が 3 桁大きいのが効いている)。

なお、サラダ油は水の 60 ～ 80 倍程度であるという。

温度が上がると μ は小さくなる。

気体の場合は、μ は圧力にはほとんどよらない。

5.11 渦度　駆け足の説明

$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ を流体の速度場とするとき

$$\boldsymbol{\omega} := \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

を**渦度**(うずど) (vorticity) と呼ぶ。

物理的には流体粒子の “自転” の角速度の 2 倍と解釈できる (そうである)。

良くある誤解　：水槽の中で水がグルグル回っていても、渦の中心以外では $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ ということがありうる。

$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ のとき、流れは**渦なし**, **非回転** (irrotational), **層状** (lammelar) などという。

しかし「渦なし」という場合、もう少し強く、ポテンシャル流である (次のスライドを見よ) という意味で使う場合があるようだ。

Lagrange の渦定理　「完全流体の、外力が保存力である流れでは、ある時刻で $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ であれば、その後も $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ である。」

ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ に対して、$\boldsymbol{v}=\nabla\phi$ $(\nabla\phi=\operatorname{grad}\phi)$ を満たす ϕ が存在するとき、ϕ を $\boldsymbol{v}$ の**ポテンシャル** と呼ぶ。特に $\boldsymbol{v}$ が速度場のとき、ϕ を $\boldsymbol{v}$ の**速度ポテンシャル**と呼ぶ。

速度ポテンシャルが存在する流れを、**ポテンシャル流**であるという。

ポテンシャル流は渦なしである。

($\because$ 一般に $\operatorname{rot}\operatorname{grad}=\mathbf{0}$ が成り立つので、$\boldsymbol{\omega}=\operatorname{rot}\boldsymbol{v}=\operatorname{rot}\operatorname{grad}\phi=\mathbf{0}$.)

単連結領域における渦なしの流れはポテンシャル流である。

($\because$ これもベクトル解析の常識 — この PDF の末尾で少し説明)

- 一般には、渦なしであっても、ポテンシャル流であるとは限らない。
- 任意の開球は単連結領域であるから、渦なしの流れは局所的にはポテンシャルを持つことが分かる。
- 多価関数のポテンシャルを認めると、より一般の渦なしの流れのポテンシャルが存在することが分かる。

粗くまとめると

渦なしの流れ ≒ ポテンシャル流

参考文献 I

[1] 桂田祐史：複素関数と流体力学, https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2/intro-fluid.pdf (2015〜).

[2] 今井功：複素解析と流体力学, 日本評論社 (1981/10/20, 1989/4/1).

[3] 桂田祐史：多変数の微分積分学 2 講義ノート 第 2 部, https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/tahensuu2/tahensuu2-p2.pdf (内容はベクトル解析) (2006〜).

[4] 桂田祐史：ベクトル解析早見表, https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/applied-complex-function-2023/vector_analysis.pdf (2021/5/31〜).

[5] 今井功：流体力学 前編, 裳華房 (1973), 流体力学の基本的文献。後編は書かれなかった。

[6] 巽友正（たつみともまさ）：流体力学, 培風館 (1982).

参考文献 II

[7] 岡本久, 中村周：関数解析, 岩波書店 (2006/1/26, 2016/11/10 (POD 版)), 岩波講座現代数学の基礎 (1996〜1999) の分冊を単行本化したもの.