

# 応用複素関数 第13回 ポテンシャル問題 (4)

桂田 祐史

katurada@meiji.ac.jp

2026 年 7 月 14 日, 2026 年 7 月 14 日

## 目次

|                              |    |
|------------------------------|----|
| 0 本日の内容・連絡事項                 | 1  |
| 6 ポテンシャル問題                   | 2  |
| 6.8 ポテンシャル問題の数値解法 (2) 基本解の方法 | 2  |
| 6.8.4 数値等角写像に対する天野の方法        | 2  |
| 6.8.5 Jordan 領域の等角写像の計算プログラム | 3  |
| 6.9 数値計算例: 楕円領域の等角写像         | 6  |
| A Schwartz の超関数への超入門         | 6  |
| A 参考文献                       | 10 |
| 参考文献                         | 11 |

## 0 本日の内容・連絡事項

- レポート課題は2つだけとする。それで 40%. 期末試験 60%. 割合はシラバスに書いた通り。課題の数だけ  $3 \rightarrow 2$  となった。
- 期末試験 (第8回講義までの範囲) については、次回の講義で説明し (そのときには試験問題が出来ているので、少し具体的な話ができる)、質問を受け付ける。

本日の講義は

- 等角写像を数値計算で求めるための天野の方法について解説する。
- 基本解の話をしたし、次回は佐藤超関数の紹介をするので、Schwartz の超関数 (distribution) の紹介をする。

## 6 ポテンシャル問題

### 6.8 ポテンシャル問題の数値解法 (2) 基本解の方法

#### 6.8.4 数値等角写像に対する天野の方法

天野 要<sup>かなめ</sup> は、§6.4.3 (2026/6/23 講義 <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2-2026/20260623.pdf#page=5>) で述べた等角写像の求め方 (定理 6.7 … 以下に再掲) と、前回説明した基本解の方法を組み合わせた、数値等角写像 (領域の写像関数を数値的に求めること) の効率的なアルゴリズムを提唱した (天野 [1])。それ以降、数多くの研究が後に続き、基本的なアルゴリズムとして定着した。

それを解説する。

§6.4 で導入した記号を用いる。定理だけ引用しておく。

**定理 6.7 (Jordan 領域の写像関数)**  $\Omega$  を  $\mathbb{C}$  内の Jordan 領域、 $z_0 \in \Omega$  とする。 $u$  を、Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題

$$(6.1a) \quad \Delta u = 0 \quad (\text{in } \Omega)$$

$$(6.1b) \quad u(x, y) = -\log |z - z_0| \quad (z = x + iy \in \partial\Omega).$$

の解、 $v$  を  $u$  の共役調和関数で  $v(z_0) = 0$  を満たすものとするとき

$$\varphi(z) := (z - z_0) \exp(u(z) + iv(z))$$

は、 $\Omega$  の写像関数であり ( $\varphi: \Omega \rightarrow D_1$  双正則)、正規化条件 ( $\varphi(z_0) = 0, \varphi'(z_0) > 0$ ) を満たす。

$u$  の近似  $u^{(N)}$  を基本解の方法で求めよう。 $N \in \mathbb{N}$  に対して、 $\{\zeta_k\}_{k=1}^N$  を「 $\Omega$  を取り囲むように」 $\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$  から選び、

$$(6.2) \quad u^{(N)}(z) := \sum_{k=1}^N Q_k \log |z - \zeta_k|$$

とおく。ここで  $Q_k$  ( $k = 1, \dots, N$ ) は未知の実定数である。

$\{z_j\}_{j=1}^N$  を  $\partial\Omega$  から選び、連立 1 次方程式

$$(6.3) \quad u^{(N)}(z_j) = -\log |z_j - z_0| \quad (j = 1, \dots, N)$$

を解いて  $Q_k$  ( $k = 1, \dots, N$ ) が求められる。

$u^{(N)}$  の共役調和関数  $v^{(N)}$  ( $u^{(N)}$  を実部に持つ正則関数) を求めて、正則関数に拡張したい。(一般には、それなりの手間がかかるが、今の場合は、 $u^{(N)}$  が対数関数で表されているので、複素対数関数を利用することで、手間が軽減される、という話である。)

天下りになるが、

$$(6.4) \quad f^{(N)}(z) := Q_0 + \sum_{k=1}^N Q_k \operatorname{Log} \frac{z - \zeta_k}{z_0 - \zeta_k}, \quad Q_0 := \sum_{k=1}^N Q_k \log |z_0 - \zeta_k|$$

とおく。ここで  $\operatorname{Log}$  は主値を表すとする ( $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  を定義域とする)。

$$\operatorname{Re} f^{(N)}(z) = \sum_{k=1}^N Q_k \log |z_0 - \zeta_k| + \sum_{k=1}^N Q_k \log \left| \frac{z - \zeta_k}{z_0 - \zeta_k} \right| = \sum_{k=1}^N Q_k \log |z - \zeta_k| = u^{(N)}(z)$$

である。さらに

$$f^{(N)}(z_0) = Q_0 + \sum_{k=1}^N Q_k \operatorname{Log} \frac{z_0 - \zeta_k}{z_0 - \zeta_k} = Q_0 + \sum_{k=1}^N 0 = Q_0 \in \mathbb{R}.$$

言い換えると  $\operatorname{Im} f^{(N)}(z_0) = 0$ . この  $f^{(N)}$  は、 $f = u + iv$  ( $v$  は  $v(z_0) = 0$  を満たす) の良い近似であると考えられる。

以上をまとめると、次のアルゴリズムが得られる。

#### 天野のアルゴリズム

(再掲 6.2) 
$$u^{(N)}(z) := \sum_{k=1}^N Q_k \log |z - \zeta_k|,$$

(再掲 6.3) 
$$u^{(N)}(z_j) = -\log |z_j - z_0| \quad (j = 1, \dots, N),$$

(再掲 6.4) 
$$f^{(N)}(z) := Q_0 + \sum_{k=1}^N Q_k \operatorname{Log} \frac{z - \zeta_k}{z_0 - \zeta_k}, \quad Q_0 := \sum_{k=1}^N Q_k \log |z_0 - \zeta_k|$$

(0)  $\{\zeta_k\}_{k=1}^N \subset \mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$ ,  $\{z_j\}_{j=1}^N \subset \partial\Omega$  を適当に選ぶ。

(1) (6.2), (6.3) で  $\{Q_k\}$  を求める (つまり  $\sum_{k=1}^N Q_k |z_j - \zeta_k| = -\log |z_j - z_0|$  ( $j = 1, \dots, N$ ) という連立 1 次方程式を解く)。

(2) (6.4) で  $f^{(N)}$  を定める。

(3)  $\varphi^{(N)}(z) := (z - z_0) \exp f^{(N)}(z)$  で定義される  $\varphi^{(N)}$  を、等角写像  $\varphi: \Omega \rightarrow D_1$  の近似解に採用する。

#### 6.8.5 Jordan 領域の等角写像の計算プログラム

以下の Python プログラム conformalmap-v3.py では

$$\Omega := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}, \quad z_0 = \frac{1}{2}$$

の場合の  $\Omega$  の写像関数、すなわち双正則な  $\varphi: \Omega \rightarrow D_1$  で

$$\varphi(z_0) = 0, \quad \varphi'(z_0) > 0$$

を満たすものを求める。この場合、実は次の 1 次分数変換が解である (ことは一応説明済みである)。

$$\varphi(z) = \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z}.$$

```

conformalmap-v3.py
# conformalmap-v3.py
# https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2/conformalmap-v3.py
# https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2-2026/20260714.pdf

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def amanomap(z,z0,Q0,Q,zeta):
    s = Q0+np.dot(Q,np.log(np.divide(z-zeta,z0-zeta)))
    return (z-z0) * np.exp(s)

z0=0.6
R=2
N=80
I=1j
thetas=np.linspace(0.0,2.0*np.pi,N,endpoint=False)
zs=np.exp(I*thetas)
zetas=R*zs # 境界拡大法 (凸領域ならばそれで十分)
#a=np.empty((N,N))
#for j in (range(N)):
#    for k in (range(N)):
#        a[j,k]=np.log(abs(zs[j]-zetas[k]))
a=np.log(np.abs(zs[:, np.newaxis] - zetas[np.newaxis, :]))
b=-np.log(abs(zs-z0))
# Qk (k=1,...N) と Q0 を求める
Q=np.linalg.solve(a,b)
Q0=np.dot(Q,np.log(abs(z0-zetas)))

# ここまでで計算は完了。可視化はどうするものか...
# z 平面 (もとの領域のあるところ) と w 平面 (単位円盤領域のあるところ)
fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(1, 2, figsize=(12, 6))
ax1.set(aspect=1)
ax2.set(aspect=1)

m=20
nr=m
nt=4*nr
# 円周上の点
ts=np.linspace(0.0,2.0*np.pi,nt+1)
boundary_points=np.exp(I*ts)
# 内部の点を求める (周上の点を縮めていく)
rs=np.linspace(0.0,1.0,nr+1)

region_points=np.empty((nr+1,nt+1),dtype=np.complex128)
for i in range(nr+1):
    region_points[i,:]=rs[i]*boundary_points

# 領域 $\Omega$  (今回は円盤) の表示
for i in range(nr+1):
    ax1.plot(region_points[i,:].real,region_points[i,:].imag)
for j in range(nt+1):
    ax1.plot(region_points[:,j].real,region_points[:,j].imag)

# 単位円盤領域の表示
image_points=np.empty((nr+1,nt+1),dtype=np.complex128)
for i in range(nr+1):
    for j in range(nt+1):
        image_points[i,j]=amanomap(region_points[i,j],z0,Q0,Q,zetas)
for i in range(nr+1):
    ax2.plot(image_points[i,:].real,image_points[i,:].imag)
for j in range(nt+1):
    ax2.plot(image_points[:,j].real,image_points[:,j].imag)

plt.savefig('conformalmap-v3.pdf')
plt.show()

```

有限要素法では FreeFEM のような専用のプログラミング言語を使ったが、基本解の方法では、Python のような普通のプログラミング言語で、ほとほとどの行数のプログラムが書けるのは嬉しい。

**中心部分の説明**  $\{z_k\}, \{\zeta_k\}$  の用意 (変数 `zs, zetas` への値の格納) が出来た後は

```
a=np.log(np.abs(zs[:, np.newaxis] - zetas[np.newaxis, :]))
b=-np.log(abs(zs-z0))
Q=np.linalg.solve(a,b)
Q0=np.dot(Q,np.log(abs(z0-zetas)))
```

というわずか4つの命令を実行するだけで  $\{Q_k\}_{k=0}^N$  が得られる<sup>1</sup>。求めた  $\{Q_k\}_{k=0}^N$  から近似解を計算するには

```
def amanomap(z,z0,Q0,Q,zeta):
    s = Q0+np.dot(Q,np.log(np.divide(z-zeta,z0-zeta)))
    return (z-z0) * np.exp(s)
```

という関数を呼べばよい。

## 試してみよう

プログラム入手 — ターミナルで次を実行 —

```
curl -O https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2/conformalmap-v3.py
```

ターミナルで次のように実行 —

```
python conformalmap-v3.py
```

当たり前だけれど、単位円盤が単位円盤に写っている。 $z_0 = 0.6$  について、 $\varphi(z_0) = 0$ ,  $\varphi'(z_0) > 0$  となっているだろうか (目視のレベルでは大丈夫そう)。厳密解との差を調べるというのもそのうちやってみよう。

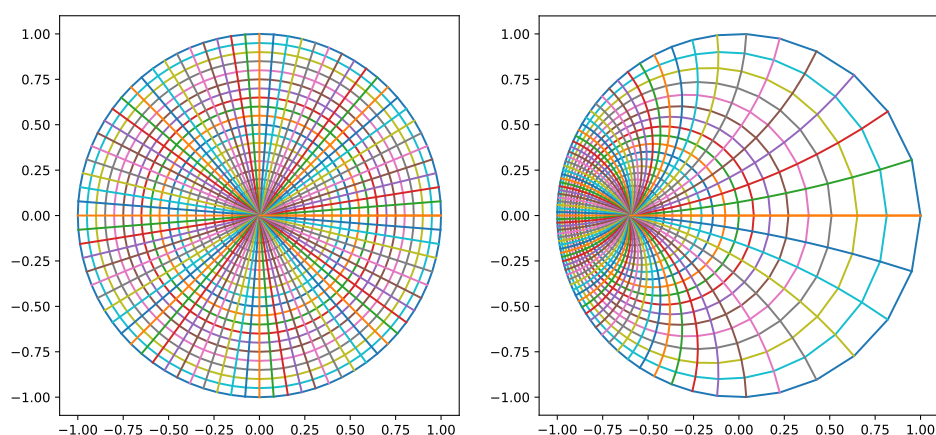


図 1:  $z_0 = 0.6$  の場合.  $w = \varphi(z)$  による  $z$  平面の原点中心の同心円、単位円の半径の像を描いた。

<sup>1</sup>係数行列 `a` の設定は、もともとは二重ループを回していたのだけれど、改善したいと ChatGPT に相談したら、1行命令に直してくれた。

## 6.9 数値計算例: 楕円領域の等角写像

さすがに  $\Omega$  が円盤の場合は単純すぎるので (1 次分数変換で書いてしまうし)、少し難しいものを解いてみよう。

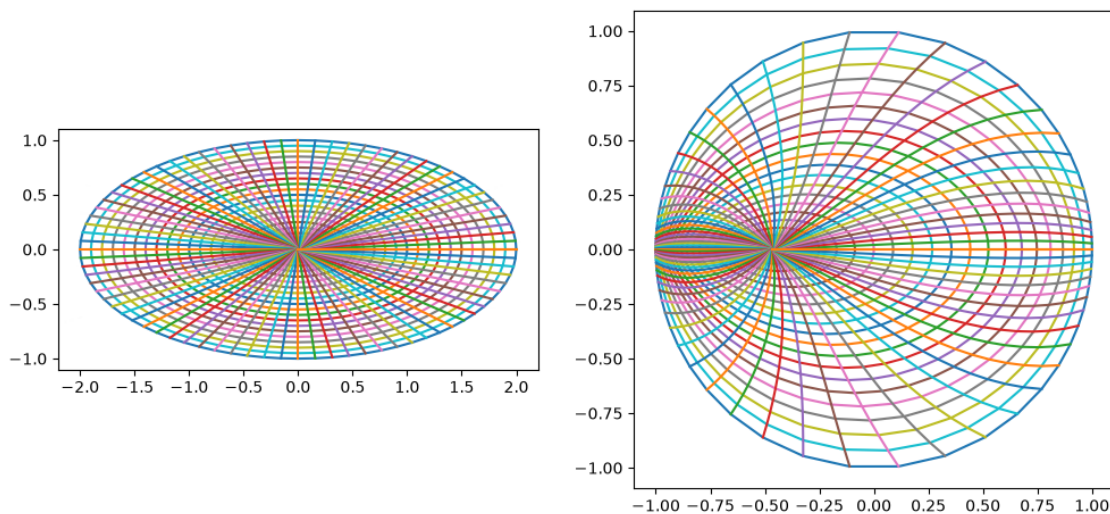


図 2: 楕円領域 ( $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^2} < 1$ ) を単位円盤に等角に写像する ( $z_0 = 0.6$  を  $w = 0$  に写す)

楕円領域の場合 — ターミナルで次を実行 —

```
curl -O https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2/ellipse-conformalmap.py
python ellipse-conformalmap.py
```

楕円領域の等角写像は、数式で表せるが、楕円関数が必要になる (辻・小松 [2], この元ネタは小松 [3] の下巻 p. 41 である。桂田 [4] の §5.3 に色々書いておいた (余談 5.1, 5.2)。英語文献では Schwarz [5], Szegő [6] というのがある。小松先生の式は Szegő の説明よりは早いけれど、本質的には Schwarz が解いていたことになるのか。Schwarz の結果は当時の日本では知られていなかったのか？一言でまとめると「かなり面倒」。

数値計算で得られるのは、近似等角写像にすぎない、ということは出来るが、多くの領域の近似等角写像が手軽に得られるのは素晴らしいことと思う。

今年度は、この基本解の方法で、レポート課題 3 を出そうと思っていたのですが、それはやめにします。

## A Schwartz の超関数への超入門

Dirac のデルタ (超) 関数の紹介をしたので、簡単に Schwartz の超関数の紹介をしておく。 $\Omega$  を  $\mathbb{R}^n$  の開集合とする。

$\Omega$  で定義された連続関数全体を  $C(\Omega)$ ,  $C^\infty$  級関数全体を  $C^\infty(\Omega)$  と表す。

**定義 A.1 (多重指数の記法)**

$$\mathbb{Z}_{\geq 0} := \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0\}$$

とする。 $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$  の要素を多重指数と呼ぶ。

$\varphi \in C^\infty(\Omega)$ ,  $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$  とするとき

$$D^\alpha \varphi := \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$$

と定める。

**定義 A.2 (連続関数  $\varphi$  の台  $\text{supp } \varphi$ )**  $\Omega$  を  $\mathbb{R}^n$  の開集合とする。 $\varphi \in C(\Omega)$  に対して、

$$\text{supp } \varphi := \overline{\{x \in \Omega \mid \varphi(x) \neq 0\}}$$

とおき、 $\varphi$  の台 (support of  $\varphi$ ) と呼ぶ。ここで  $\overline{\phantom{x}}$  は、 $\mathbb{R}^n$  における閉包を取ることを意味する。すなわち、 $\mathbb{R}^n$  の任意の部分集合  $A$  に対して

$$\overline{A} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \varepsilon > 0) B(x; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset\}.$$

注意すべきは、 $\text{supp } \varphi$  が  $\Omega$  をはみ出すこともある、という事実である。後に出て来る「 $\text{supp } \varphi$  は  $\Omega$  に含まれる compact 集合」という条件では、青字部分が重要である。

$f \in C^\infty(\Omega)$ ,  $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ ,  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  とするとき

$$\int_{\Omega} D^\alpha f(x) \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f(x) D^\alpha \varphi(x) dx$$

が成り立つ。 $f$  が微分可能でない場合も、右辺は値が定まることに注意しよう。これから、普通の意味では必ずしも微分できない  $f$  に対して、その導関数  $D^\alpha f$  が定義できる。

**定義 A.3 ( $C_0^\infty(\Omega)$ , 試験関数)**  $\mathbb{R}^n$  の開集合  $\Omega$  に対して、

$$C_0^\infty(\Omega) := \{\varphi \in C^\infty(\Omega) \mid \text{supp } \varphi \text{ は } \Omega \text{ に含まれる compact 集合}\}$$

とおく。 $C_0^\infty(\Omega)$  の要素をしばしば試験関数と呼ぶ。

$C_0^\infty(\Omega)$  に属する列 (関数列) に、次のような収束概念を定義する。その収束概念を備えた  $C_0^\infty(\Omega)$  のことを  $\mathcal{D}(\Omega)$  と表す。

**定義 A.4 ( $\mathcal{D}(\Omega)$  の列の収束)** 試験関数の列  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  (つまり  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}(\Omega)^{\mathbb{N}}$ ) が  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  に収束するとは、次の2条件 (a), (b) を満たすことをいう。

(a) 任意の多重指数  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$  (つまり  $\alpha_j \in \mathbb{Z}, \alpha_j \geq 0 (j = 1, \dots, n)$ ) に対して、次式が成り立つ:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha \varphi_n(x) - D^\alpha \varphi(x)| = 0.$$

(b)  $\Omega$  に含まれる compact 集合  $K$  が存在して、次式が成り立つ:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \text{supp } \varphi_n \subset K.$$

(ぶつぶつ: ここは実はかなり難しい。収束と言っているけれど、 $\mathcal{D}'(\Omega)$  に位相が定義できたわけではない。距離空間ではないので、列の収束で位相は定まらない。)

**定義 A.5 ( $\Omega$  上の超関数)**  $\Omega$  を  $\mathbb{R}^n$  の開集合とする。 $\Omega$  上の超関数とは、 $\mathcal{D}(\Omega)$  で定義された連続な線形汎関数のことである。

各試験関数  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  に数  $T[\varphi]$  を対応させる汎関数  $T: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{K}$  が  $\Omega$  上の超関数であるとは、次の (i), (ii) が成り立つことをいう、

(i)  $T$  は線形である。すなわち

$$T[\varphi_1 + \varphi_2] = T[\varphi_1] + T[\varphi_2], \quad T[\lambda\varphi] = \lambda T[\varphi].$$

(ii)  $\mathcal{D}(\Omega)$  内の列  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  が  $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$  に収束しているならば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T[\varphi_n] = T[\varphi_0].$$

また  $\Omega$  上の超関数全体を  $\mathcal{D}'(\Omega)$  と表す。

$T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ,  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  に対して、 $T[\varphi]$  のことを  $\langle T, \varphi \rangle$  と書くことも多い。

**例 A.6 (局所可積分関数の定める超関数)**  $\Omega$  上の局所可積分関数とは、 $\Omega$  に含まれる任意の compact 集合上で可積分な関数のことをいう。 $\Omega$  上の局所可積分関数全体を  $L_{\text{loc}}^1(\Omega)$  で表す。

$f \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$  とするとき

$$T_f[\varphi] := \int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\Omega))$$

により  $T_f: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{K}$  を定めると、 $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ 。この  $T_f$  を超関数としての  $f$  とか、超関数とみなした  $f$  と呼んだりする。面倒なので  $T_f$  でなく、単に  $f$  と書くことも多い。

$1 \leq p \leq \infty$  を満たす任意の  $p$  に対して、 $L^p(\Omega) \subset L_{\text{loc}}^1(\Omega)$  であるから、 $L^p$  に属するすべての関数  $f$  は超関数とみなせる、ということが出来る。■

**例 A.7 (デルタ超関数  $\delta$ )** 任意の  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  に対して、

$$\langle T, \varphi \rangle := \varphi(0)$$

とおくと、 $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  である。この  $T$  を Dirac のデルタ超関数と呼び、 $\delta$  で表す。■

**定理 A.8**  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ,  $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N$  とする。

$$\langle S, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle$$

により  $S \in \mathcal{D}'(\Omega)$  が定まる。

この  $S$  を  $T$  の  $\alpha$  階導関数ということにする。

**定義 A.9 (超関数の意味での導関数)**  $T \in \mathcal{D}(\Omega)$ ,  $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  とするとき

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle.$$

で定まる超関数  $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  を、 $T$  の  $\alpha$  階の導関数という。

1 次元 (i.e.  $n = 1$ ) のとき、 $\alpha = \alpha_1$  である。特に  $\alpha_1 = 1$  ならば、 $D^\alpha \varphi$  を  $\varphi'$  と表す。

このように定義すると、次式が成り立つのは不思議でない。

**定理 A.10** 超関数は (超関数の意味で) 何回でも微分できる。

**例 A.11 (一般化導関数)** すでに述べたように、 $1 \leq p \leq \infty$  を満たす  $p$  に対して、 $L^p(\Omega)$  の任意の要素  $f$  は、次のようにして超関数  $T_f$  とみなすことができる:

$$\langle T_f, \varphi \rangle := \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)).$$

任意の  $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$  に対して

$$\langle D^\alpha T_f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T_f, D^\alpha \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f(x) D^\alpha \varphi(x) dx.$$

しばしば  $g \in L^p(\Omega)$  が存在して、

$$T_g = D^\alpha T_f$$

となる、つまり

$$\int_{\Omega} g(x) \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f(x) D^\alpha \varphi(x) dx \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\Omega))$$

が成り立つことがある。このとき  $g$  を  $f$  の  $\alpha$  階の一般化導関数と呼ぶ。

例えば

$$f(x) = |x| \quad (x \in \mathbb{R})$$

とするとき、 $f \in L^1(\mathbb{R})$  であり、 $f$  は  $x = 0$  では微分可能でないが、 $x \neq 0$  では微分可能である:

$$g(x) := \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ -1 & (x < 0) \\ 0 & \text{(実は何でもよい)} \quad (x = 0) \end{cases}$$

で  $g$  を定めると、普通の微積分の意味では  $f' = g$  ではないが ( $x = 0$  で  $f$  は微分可能ではないから)、 $g \in L^1(\mathbb{R})$  であり

$$(T_f)' = T_g.$$

すなわち  $g$  は  $f$  の一般化導関数である。

より一般に連続で区分的 1 次関数  $f$  に対して、 $f$  の 1 階の一般化導関数が存在する。 ■

例 A.12 (Heaviside の階段関数の導関数は Dirac のデルタ超関数) 次の関数 (グラフは折れ線である) の 2 階導関数を考えてみよう。

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0), \end{cases}$$

の 1 階導関数は、次式で定義する  $H$  の定める超関数  $T_H$  である。

$$H(x) := \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

この  $H$  を **Heaviside の階段関数** (Heaviside step function) とよぶ ( $x = 0$  に対して  $H(0)$  は定めない)。これは  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  に属するから、超関数と見なすことができる。つまり

$$\langle T_H, \varphi \rangle \stackrel{\text{def.}}{=} \int_{\mathbb{R}} H(x) \varphi(x) dx = \int_0^{\infty} 1 \cdot \varphi(x) dx = \int_0^{\infty} \varphi(x) dx.$$

$H$  は (ふつうの関数として)  $x = 0$  では微分可能でないが、 $x \neq 0$  では微分可能である ( $H'(x) = 0$ )。

実は

$$(T_H)' = \delta$$

が成り立つ。実際、任意の  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  に対して

$$\begin{aligned} \langle (T_H)', \varphi \rangle &= (-1) \langle H, \varphi' \rangle = - \int_0^{\infty} \varphi'(x) dx = - \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \varphi'(x) dx = - \lim_{R \rightarrow +\infty} [\varphi(x)]_0^R \\ &= - \lim_{R \rightarrow +\infty} (\varphi(R) - \varphi(0)) = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle \end{aligned}$$

であるから

$$(T_H)' = \delta.$$

振り返ると:  $f$  は微積分の意味では微分可能ではないが、一般化導関数  $H$  を持つ。 $H$  は一般化導関数を持たないが、超関数とみなせば導関数が (当然) 存在して、それが Dirac のデルタ超関数に一致する。■

前回 (2026/7/7) の講義資料の付録で

$$\int_{\mathbb{R}^n} E(x) \Delta \varphi(x) dx = \varphi(0) \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n))$$

という公式を紹介してある (Green の公式を用いて証明できる)。これは

$$\Delta T_E = \delta$$

を意味することが分かるであろう。

## A 参考文献

### 参考文献

- [1] 天野 要<sup>かなめ</sup>: 代用電荷法に基づく等角写像の数値計算法, 情報処理学会論文誌, Vol. 28, No. 7, pp. 697–704 (1987).

- [2] 辻正次, 小松勇作: 大学演習函数論, 裳華房 (1959), 辻・小松は編著者で、執筆はそれ以外に田村二郎、小沢  
ゆうじょうぼうずいまん  
満、 祐 乗 坊 瑞満、 水本久夫。
- [3] 小松勇作: 等角寫像論 上, 下, 共立出版 (1944, 1949), 入手したいけれど…国立国会図書館でアクセス可能:  
<https://doi.org/10.11501/1162840>, <https://doi.org/10.11501/1162837> … 国立国会図書館に登録す  
ることをお勧めします。他にも色々なものが読めるようになります。
- [4] 桂田祐史: Joukovski 変換, <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lab/text/joukovski.pdf> (2012/12/19  
~).
- [5] Schwarz, H. A.: Über einige Abbildungsaufgaben, *Journal für die Reine Angew. Mathematik*, Vol. 70, pp.  
105–120 (1869), pp. 77–78 に楕円領域の写像関数がある。一方で Schwarz の交代法がらみでも良く取り上  
げられている (DDM とかで)。
- [6] Szegő, G.: Conformal Mapping of the Interior of an Ellipse onto a Circle, *The American Mathematical  
Monthly*, Vol. 57, No. 7, pp. 474–478 (1950).