応用複素関数 第11回 ポテンシャル問題 (2)

桂田 祐史

katurada@meiji.ac.jp

2026年6月30日, 2026年7月7日

目 次

0 本日の内容・連絡事項

- レポート課題2について案内する。

レポート課題1の提出先が出来ていないことが判明した!!

6 ポテンシャル問題

ポテンシャル問題に対する2つの重要なキーワードに、**変分法**、**基本解**がある。それぞれに対応して2つの数値計算法、有限要素法、基本解の方法を紹介する。

6.5 Dirichlet の原理 (歴史探訪)

まず、歴史上最初に現れた、もっとも簡単な場合について、紹介しよう。それは関数論に関するもっとも有名な論文の中に登場した。

Laplace(ラプラス)方程式のDirichlet(ディリクレ)境界値問題

$$\triangle u = 0 \quad (\text{in } \Omega), \tag{6.1a}$$

$$u = g \quad (\text{on } \partial\Omega) \tag{6.1b}$$

の解 u の存在を示すため、Riemann(リーマン) は次のように考えた (学位論文 [1], 1851 年)。

境界条件 (6.1b) を満たす関数の全体 X_g と、X_g 上の汎関数 J を考える。

$$X_g := \left\{ u \;\middle|\; u\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R},\ (\forall x \in \partial\Omega)\ u(x) = g(x) \right\},$$

$$J[u] := \iint_\Omega \left(u_x^2 + u_y^2\right) dx\, dy \quad (u \in X_g).$$

Dirichlet の原理

J の最小値を与える u は $\triangle u = 0$ (in Ω) を満たす。

したがって、汎関数 J の最小値を与える u は (6.1a), (6.1b) の解である。

(汎関数の最小問題を変分問題、それを扱う方法を変分法と呼ぶ。)

Riemann (1826–1866) は、Dirichlet (1805–1859) 先生の講義の中で Dirichlet の原理を聴いたそうである。

6.5.1 証明のあらすじ

証明のあらすじ $v\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ は、条件 $v = 0$ (on $\partial\Omega$) を満たす任意の関数とする。任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $u + tv = g + t \cdot 0 = g$ (on $\partial\Omega$). ゆえに $u + tv \in X_g$ である。仮定より

$$f(t) := J[u + tv] \quad (t \in \mathbb{R})$$

は $t = 0$ で最小値をとる。

ところが

$$f(t) = J[u] + 2t \iint_\Omega (u_x v_x + u_y v_y) dx\, dy + t^2 \iint_\Omega \left(v_x^2 + v_y^2\right) dx\, dy$$

は t の 2 次関数であり、$t = 0$ で最小となるので、1 次の係数は 0 である:

$$\iint_\Omega (u_x v_x + u_y v_y)\, dx\, dy = 0. \tag{6.2}$$

Green の公式 ($\displaystyle\iint_\Omega \triangle u v\, dx\, dy = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v\, d\sigma - \iint_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx\, dy$) より

$$\iint_\Omega \triangle u\, v\, dx\, dy = 0.$$

これが任意の v について成り立つことから (**変分法の基本補題により**)

$$\triangle u = 0 \quad (\text{in } \Omega).\blacksquare$$

6.5.2 反省

Riemann は、汎関数 $J[u]$ を最小にする $u \in X_g$ の存在は明らかだと考えた。

> J は下に有界 ($J[u] \geq 0$) であるから、J は下限を持つ。それは最小値のはず…

それに Weierstrass (1815–1897) が疑義を呈した (「下限は本当に最小値？」とツッコミを入れた)。これに Riemann は存命中に答えられなかった。

現代的な解説をすると、関数空間は無限次元空間なので、有界閉集合上の連続関数であっても、最小値を持たないことがありえる。

ポテンシャル問題は重要なため、解の存在について、多くの人が努力して Dirichlet 原理を用いない証明がいくつか発見されたが、Riemann の発表から約 50 年後 (1900 年頃)、D. Hilbert が Dirichlet 原理に基づく証明を発表し、肯定的に解決した。

今では解の存在証明は、このルートをたどるのがスタンダードになっている。…でも応用複素関数としては、ここから数値計算法に舵を切る (存在証明については、関数解析か偏微分方程式論で学んでください)。
以上の話は、少し込み入っていて、初めて聴く人には分かりにくいと思われるので、振り返っておこう。

- Riemann の写像定理という関数論で基本的と考えられている定理がある。それは領域の写像関数の存在に関する定理である。
- Jordan 曲線 (単純閉曲線) で囲まれた領域[1]の写像関数は、Laplace 方程式のある Dirichlet 境界値問題を解くことで求まる。
- Riemann は、その境界値問題が次のように解けると主張した:
  汎関数 $J[u] := \iint_\Omega (u_x^2 + u_y^2)\,dx\,dy$ の最小化問題 (変分問題) が解ければ良い ($\because$ Dirichlet の原理)。この J の最小値の存在は明らか (？)。

  → ツッコミが入って、頓挫したが、結局は解決された。

最小性は

$$\iint_\Omega (u_x v_x + u_y v_y)\,dx\,dy = 0 \quad (v \text{ は条件 } v = 0 \text{ on } \partial\Omega \text{ を満たす任意の関数})$$

という条件と同値である。この式は**弱形式**と呼ばれる。**有限要素法**という数値解法では、微分方程式の近似解を弱形式の解として求める。

6.6 ポテンシャル問題の数値解法 (1) 有限要素法

ポテンシャル問題を数値計算で解くことを考えよう。この「応用複素関数」では、**有限要素法**と**基本解の方法**を簡単に紹介する。

差分法で解くこともできるが、長方形領域でない問題を解くには工夫が必要になり、あまり便利でない。

有限要素法の主たるアイディアは次の 2 つ:

[1] 穴が空いていないということで、最も単純と考えられる。

(1) **弱形式**を用いる。

(2) 領域を三角形、四面体などの**有限要素**に分割し、近似解や試験関数に**区分的多項式**を採用する。

この講義では有限要素法の詳細は解説できないが、幸い **FreeFEM** というソフトウェアを用いると、弱形式さえ分かれば、有限要素については FreeFEM 任せにして、数値計算ができる。

実は、Dirichlet 原理の証明中に現れた (6.7) は、Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題の弱形式である。(一般の場合の弱形式については、次項で解説を行う。)

ここでは「百聞は一見にしかず」で、まずはプログラム (スライドで 1 枚程度) を紹介する。これは単位円版領域

$$\Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2<1\right\}$$

の場合に、Laplace 方程式の Neumann 境界値問題

$$\triangle\phi = 0 \quad (\text{in }\Omega),\qquad \frac{\partial\phi}{\partial n} = V_n \quad (\text{on }\partial\Omega)$$

を解くためのものである。ただし

$$V_n(x,y) = x + 2y.$$

(これは、一様流 $\boldsymbol{V}(x,y) = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ の場合の $\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}$ を想定している。単位円版領域の場合、$\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ であることに注意しよう。)

弱形式は

$$\iint_\Omega (u_x v_x + u_y v_y)\,dx\,dy = \int_{\partial\Omega} V_n v\,d\sigma \quad (v \text{ は試験関数}).$$

(偏微分方程式の解を u, 弱形式の試験関数を v と書く習慣に倣ったが、速度場 $\boldsymbol{v}$ と文字がかぶってわかりにくくなった。ここでは、速度場の方を大文字で書くことにした。)

2,3 行書き換えるだけで「自分の問題」が解ける。

```
// potential2d-v0.edp
//   https://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/potential2d-v0.edp
//   2 次元非圧縮ポテンシャル流
//     速度ポテンシャル，速度を求め、等ポテンシャル線，速度場を描く

border Gamma(t=0,2*pi) { x = cos(t); y = sin(t); } // 円盤領域
int m=40;
mesh Th=buildmesh(Gamma(m));
plot(Th, wait=1, ps="Th.eps");
// 次の 2 行は区分 1 次多項式を使うという意味
fespace Vh(Th,P1);
Vh phi, v;
// 境界条件の設定
func Vn=x+2*y;// Ωが単位円で，V=(1,2) のとき V・n=x+2y
// 整合条件のチェック
cout << "check the compatibility condition: " << int1d(Th,Gamma)(Vn) << endl;

// 速度ポテンシャルφを求め、その等高線（等ポテンシャル線）を描く
solve Laplace(phi,v,solver=CG) =
  int2d(Th)(dx(phi)*dx(v)+dy(phi)*dy(v)) - int1d(Th,Gamma)(Vn*v);
```

```
plot(phi,ps="contourpotential.eps",wait=1);

// ベクトル場 (v1,v2)=∇φ を描く (ちょっと雑なやり方)
Vh v1, v2;
v1=dx(phi); v2=dy(phi);
plot([v1,v2],ps="vectorfield.eps",wait=1);

// 等ポテンシャル線とベクトル場を同時に描く
plot([v1,v2],phi,ps="both.eps", wait=1);
```

6.7 弱解の方法

6.7.1 はじめに

今回用いる有限要素法は、今では微分方程式論で常識となっている**弱解の方法** (weak formulation) を応用したものである。

これは、Riemann による、Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題を解くために用いた論法を発展させたものである。現在では様々な微分方程式に応用されているが、ここではもっとも基本的な Poisson 方程式の境界値問題について説明する (おおむね菊地 [2] に沿った解説)。

厳密に議論するには、**広義導関数**、いわゆる **Sobolev**(ソボレフ) **空間**を導入する必要がある。具体的には、後で出て来る X_{g_1} と X は、本当は Sobolev 空間の一種 $H^1(\Omega)$ を用いて

$$X_{g_1} := \left\{ w \in H^1(\Omega) \;\middle|\; w = g_1 \text{ on } \Gamma_1 \right\}, \quad X := \left\{ v \in H^1(\Omega) \;\middle|\; v = 0 \text{ on } \Gamma_1 \right\}$$

と定義すべきものである。ともあれ、ここでは関数の滑らかさに関する議論には目をつぶって議論する。(Sobolev 空間を学ぶときは、Brezis [3], [4] が私のおすすめである。)

6.7.2 Poisson 方程式の境界値問題 (P)

Laplace 方程式を一般化した Poisson 方程式の境界値問題 (P) を考える。

Ω は $\mathbb{R}^m$ $(m = 2, 3)$ の有界領域、$\Gamma := \partial\Omega$ は Ω の境界、Γ_1 と Γ_2 は

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma, \quad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$$

を満たす。また、$f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $g_1\colon \Gamma_1 \to \mathbb{R}$, $g_2\colon \Gamma_2 \to \mathbb{R}$ が与えられているとする。$\Gamma_1 = \emptyset$ (全周 Neumann) のときは、解が存在するために $\displaystyle\int_{\Gamma_2} g_2\, d\sigma = 0$ を仮定する必要がある。

$m = 2$ の場合は、$\displaystyle\int_{\Gamma_2} g_2\, d\sigma$ は線積分 $\displaystyle\int_{\Gamma_2} g_2\, ds$ である。

問題 (P)

Find u s.t.

$$-\triangle u = f \quad (\text{in } \Omega), \tag{6.3}$$

$$u = g_1 \quad (\text{on } \Gamma_1), \tag{6.4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g_2 \quad (\text{on } \Gamma_2). \tag{6.5}$$

6.7.3 弱定式化 (W) と変分問題 (V)

$$X_{g_1} := \left\{ w \mid w\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R},\ w = g_1 \text{ on } \Gamma_1 \right\}, \quad X := \left\{ v \mid v\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R},\ v = 0 \text{ on } \Gamma_1 \right\},$$

(6.6)
$$J[w] := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2\, d\boldsymbol{x} - \int_\Omega f\, w\, d\boldsymbol{x} - \int_{\Gamma_2} g_2\, w\, d\sigma \quad (w \in X_{g_1}).$$

とおく。X の要素はしばしば**試験関数** (test function) と呼ばれる。
次の 2 つの問題を考える。

(W)

Find $u \in X_{g_1}$ s.t.

(6.7)
$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega f\, v\, d\boldsymbol{x} + \int_{\Gamma_2} g_2\, v\, d\sigma \quad (v \in X).$$

(条件 (6.7) を**弱形式** (weak form) と呼ぶ。)

(V)

Find $u \in X_{g_1}$ s.t.

(6.8)
$$J[u] = \inf_{w \in X_{g_1}} J[w]. \qquad (\inf \text{ は結局は } \min)$$

6.7.4 3 つの問題 (P), (W), (V) の同等性

(P), (W), (V) は、ほぼ同値な問題である。
実際、次が成り立つ。

定理 6.1 (1) u が (P) の解 $\Rightarrow$ u が (W) の解

(2) u が (W) の解 $\Leftrightarrow$ u が (V) の解

(3) u が (W) の解かつ u が C^2 級 $\Rightarrow$ u が (P) の解

(2026 年度の講義では、(1) 以外の証明を省略する。一気に ?? まで飛ぶ。)

6.7.5 (P) の解は (W) の解 — 弱形式の導出 (今回の最重要部分)

(1) の証明 u が (P) の解と仮定する。(6.3) $-\triangle u = f$ に任意の $v \in X$ をかけて Ω 上で積分すると

(6.9)
$$-\int_\Omega \triangle u\, v\, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega f v\, d\boldsymbol{x}.$$

左辺を Green の公式 (有名である。例えば [5]) を用いて変形してから、$v = 0$ (on Γ_1) と (6.5) $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = g_2$ を用いると

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega \triangle u\, v\, d\boldsymbol{x} &= -\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} v\, d\sigma + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, d\boldsymbol{x} \\
&= -\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\, v\, d\sigma - \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\, v\, d\sigma + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, d\boldsymbol{x} \\
&= -\int_{\Gamma_2} g_2\, v\, d\sigma + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, d\boldsymbol{x}.
\end{aligned}$$

(6.9) に代入して移項すると

$$\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,d\boldsymbol{x}=\int_\Omega f\,v\,d\boldsymbol{x}+\int_{\Gamma_2} g_2\,v\,d\sigma.$$

すなわち、u は弱形式を満たす ((W) の解である)。 ■

6.7.6 (W) と (V) は同値

(2) の証明のために補題を準備する。

補題 6.2 任意の $w\in X_{g_1}$, $v\in X$, $t\in\mathbb{R}$ に対して次式が成立する。

$$J[w+tv]=\frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\,d\boldsymbol{x}+t\left(\int_\Omega \nabla w\cdot\nabla v\,d\boldsymbol{x}-\int_\Omega f\,v\,d\boldsymbol{x}-\int_{\Gamma_2} g_2\,v\,d\sigma\right)+J[w]. \tag{6.10}$$

証明は単なる計算であるので省略する。

(2) の証明 [u が (V) の解 $\Rightarrow$ u は (W) の解] (デジャブ？ Dirichlet 原理の証明と似ている)
u は (V) の解とする。任意の $v\in X$ に対して、$f(t):=J[u+tv]$ $(t\in\mathbb{R})$ とおくと、

$$f(t)=J[u+tv]\geq J[u]=f(0).$$

ゆえに f は $t=0$ で最小になる。ゆえに $J[u+tv]$ の t の 1 次の項の係数は 0 である:

$$\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,d\boldsymbol{x}-\int_\Omega f\,v\,d\boldsymbol{x}-\int_{\Gamma_2} g_2\,v\,d\sigma=0.$$

ゆえに u は (W) の解である。

[u が (W) の解 $\Rightarrow$ u は (V) の解]
u は (W) の解とする。任意の $w\in X_{g_1}$ に対して、$v:=u-w$ とおくと $v\in X$ である。

$$\begin{aligned}J[w]-J[u]&=J[u+1\cdot v]-J[u]\quad(t=1\text{ として補題 6.2 を適用})\\&=\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla v|^2\,d\boldsymbol{x}+\left(\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla v\,d\boldsymbol{x}-\int_\Omega f\,v\,d\boldsymbol{x}-\int_{\Gamma_2}g_2\,v\,d\sigma\right)\\&=\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla v|^2\;d\boldsymbol{x}\geq 0.\end{aligned}$$

ゆえに $J[u]$ は $J[w]$ の最小値である。すなわち u は (V) の解である。 ■

6.7.7 (W) の解が滑らかならば (P) の解

(3) の証明 u が (W) の解であり、かつ十分滑らかと仮定する。(W) の解であるから、

$$\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,d\boldsymbol{x}=\int_\Omega f\,v\,d\boldsymbol{x}+\int_{\Gamma_2} g\,v\,d\sigma\quad(v\in X)$$

を満たす。さらに滑らかであるので、左辺に Green の公式が適用できて

$$\int_{\Gamma_2}\frac{\partial u}{\partial n}v\,d\sigma-\int_\Omega \triangle u\,v\,d\boldsymbol{x}=\int_\Omega f\,v\,d\boldsymbol{x}+\int_{\Gamma_2} g_2\,v\,d\sigma\quad(v\in X). \tag{$\star$}$$

特に $v\in C_0^\infty(\Omega)$ の場合を考えると (境界上の積分が 0 なので)

$$-\int_\Omega \triangle u\, v\, d\boldsymbol{x}=\int_\Omega f\, v\, d\boldsymbol{x}\quad (v\in C_0^\infty(\Omega)).$$

変分法の基本補題より

$$-\triangle u=f\quad (\text{in }\Omega).$$

これを $(\star)$ に代入すると

$$\int_{\Gamma_2}\frac{\partial u}{\partial n}v\, d\sigma=\int_{\Gamma_2} g_2\, v\, d\sigma\quad (v\in X).$$

再び変分法の基本補題より、$\dfrac{\partial u}{\partial n}=g_2$ (on Γ_2). ゆえに u は (P) の解である。 証明終 ……… 以上、Dirichlet 原理の一般化をしたと言える。

「任意の」(実際には「何かの条件を満たすすべての」) 関数 φ について $\displaystyle\int_\Omega f(x)\varphi(x)\, dx=0$ が成り立つならば、$f=0$ (in Ω), という形の命題を**変分法の基本補題** (fundamental lemma of calculs of variations) という。

色々なバージョンがあるが、次の形のもので用が足りることが多い。

命題 6.3 (変分法の基本補題) Ω は $\mathbb{R}^n$ の開集合、$f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ は局所可積分関数で

$$(\forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega))\quad \int_\Omega f(x)\varphi(x)\, dx=0$$

を満たすならば

$$f=0\quad (\text{a.e. on }\Omega).$$

Ω で局所可積分とは、Ω に含まれる任意のコンパクト集合上で Lebesgue 積分可能ということ。

$f=0$ (a.e on Ω) とは、Ω に含まれるある測度 0 の集合 N を除いて $f=0$ ということ。「f は Ω 上ほとんどいたるところ 0 に等しい」という。

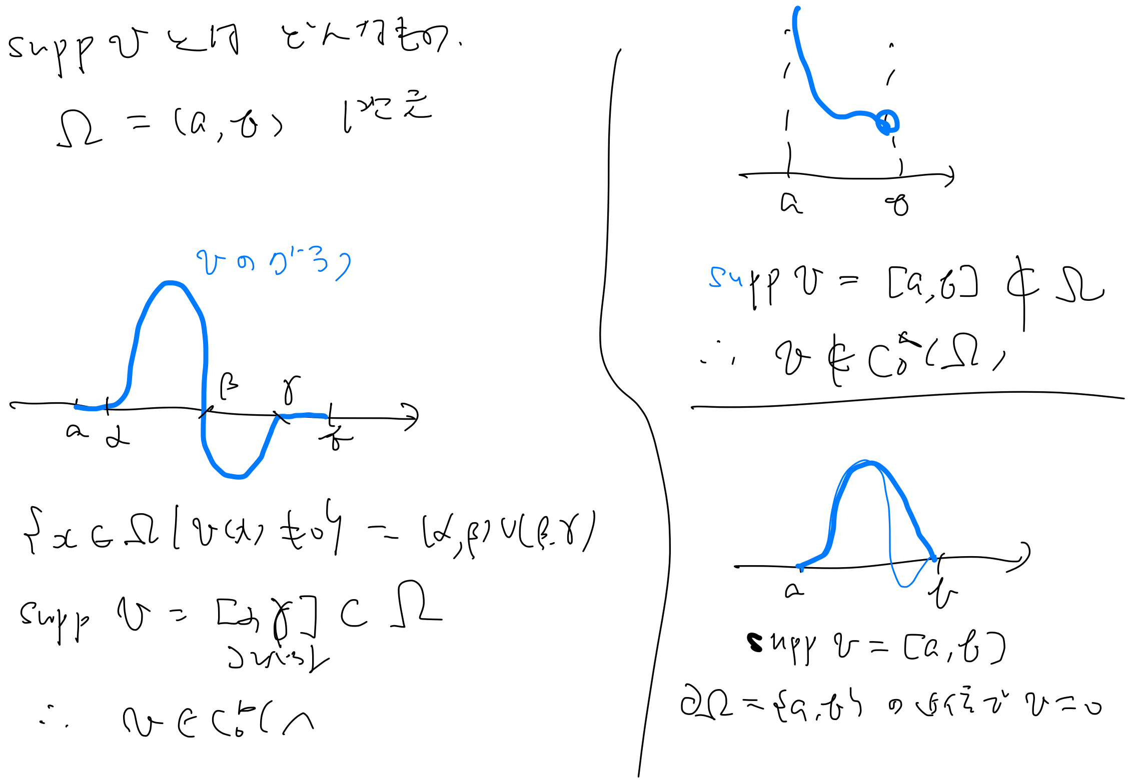
$C_0^\infty(\Omega)$ という記号は、解析学で頻出する (知っておくと良い)。
Ω を $\mathbb{R}^n$ の開集合とするとき、$C_0^\infty(\Omega)$ を

$$C_0^\infty(\Omega):=\left\{v\in C^\infty(\Omega)\;\middle|\;\operatorname{supp} v \text{ はコンパクトで、}\Omega\text{ に含まれる}\right\}$$

で定める。ここで $\operatorname{supp} v$ は v の台 (the support of v) と呼ばれる集合で、次式で定められる。

$$\operatorname{supp} v:=\overline{\{x\in\Omega\mid v(x)\neq 0\}}.$$

ここで $\overline{}$ は、$\mathbb{R}^n$ における閉包を意味する。
コンパクトとは、$\mathbb{R}^n$ の部分集合 K については、K が有界な閉集合ということである。
$v\in C_0^\infty(\Omega)$ とは、v が C^∞ 級で、$\partial\Omega$ のある近傍では $v=0$ を満たすことを意味する。



6.7.8 定理の使い道

(P) の解を求めたり、一意的な存在を示したいわけであるが、代わりに (W) (あるいは (V)) を考える。

(W) の解の一意的な存在を示すのは比較的容易である。また (W) の近似解を求めるのも簡単である (有限要素法がまさにそれをしてくれる)。

(W) の解が本当に (P) の解であるか？が問題になる。言い換えると

(W) の解 u は滑らかだろうか？

この問は、一見細かいことのようだが、実はとても重要である。

良く知られた (部分的な) 解答

- Ω が C^2 級であれば (どういう意味か説明していないが) Yes.
- Ω が多角形の場合、凸ならば Yes, 凸でないならば一般には No.

(FreeFEM の例で、L 字型の領域や、立方体から小さい立方体を除いた領域がしばしば登場するが、このあたりのこと (領域の凸性) を問題にしているわけである。)

2026/6/30 の講義では、ここまで解説することを目標とする。時間に余裕があれば、レポート課題 2 の説明をする。

7 参考文献

参考文献

[1] Riemann, G. F. B.: *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse eine Abhandlung*, PhD thesis, Die Universität Göttingen (1851), 学位論文. 組版し直した https://www.emis.de/classics/Riemann/Grund.pdf が入手できる．邦訳が [6], [7] にある．

[2] 菊地文雄：有限要素法概説, サイエンス社 (1980), 新訂版 1999.

[3] Brezis, H.: 関数解析, 産業図書 (1988), (藤田 宏, 小西 芳雄 訳), 原著は版を改めて、より内容豊富になっています。

[4] Brezis, H.: *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer (2011).

[5] 桂田祐史：ベクトル解析早見表, https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2-2026/vector_analysis.pdf (2021/5/31〜).

[6] リーマン：リーマン論文集, 朝倉書店 (2004/3/1), 足立 恒雄, 杉浦 光夫, 長岡 亮介 編訳.

[7] 小松彦三郎, 井上鉄也：リーマンの「一複素変量の関数一般論のための基礎」, 数理解析研究所講究録, Vol. 1257, pp. 88–121 (2002), https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1257-9.pdf …素敵ですね (邦訳がネットで読めること、小松先生の解説が読めること).