応用複素関数 第10回 ポテンシャル問題 (1)

桂田 祐史
katurada@meiji.ac.jp

2026年6月23日, 2026年6月25日

目 次

0 本日の内容・連絡事項

- 今回から「ポテンシャル問題」の解説を始める (それについてレポート課題3を出す予定)。
- 適当なタイミングで、7 節の FreeFEM の紹介・インストールを行う。

6　ポテンシャル問題

6.1　はじめに

(復習) Laplace 方程式の境界値問題は、ポテンシャル問題と呼ばれる。

関数論では、しばしばある条件を満たす正則関数 $f=u+iv$ の存在が問題となる。その際にまずその関数の実部 u を求め、虚部 v は実部 u の共役調和関数として得る、という二段階作戦が使われることがしばしばある (後で等角写像を求める実例が出て来る)。正則関数の実部 u は調和関数 (Laplace 方程式の解) であるので、その境界値が得られれば、Laplace 方程式の境界値問題の解として特徴付けられる。

実感を持つため、すでに見たことのある問題を振り返ろう。非圧縮渦なし (ポテンシャル) 流の速度ポテンシャル ϕ (複素速度ポテンシャル f の実部) は次を満たす (第 8 回授業)。

(6.1a) $$\triangle\phi=0 \qquad \text{(in } \Omega)$$

(6.1b) $$\frac{\partial\phi}{\partial \boldsymbol{n}}=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} \qquad (\text{on } \partial\Omega).$$

$\partial\Omega$ 上の $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$ (速度の法線成分) が分かれば、(6.1a), (6.1b) は、Laplace 方程式の Neumann 境界値問題である。かなり一般的な条件下で、定数差を除いて一意的に解が存在することが知られている[1]。

ϕ が求まれば、$\boldsymbol{v}=\operatorname{grad}\phi$ により $\boldsymbol{v}$ が得られ、流れが分かる。

$\partial\Omega$ 上の $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$ さえ分かれば、(6.1a), (6.1b) を解いて流れが求まる。

前節で既知の正則関数を組み合わせることで色々な 2 次元流れを表す、という手法を紹介した。例えば円柱周りの一様流の問題などを解いた。扱える問題の範囲が異なり、どちらが優れているとも言えないが、こちらの方法の有効性を想像するのは難しくないであろう (実際、とても強力である)。

6.2　Poisson 方程式の境界値問題

6.2.1　その重要性の説明

Laplace 方程式の境界値問題 (6.1a), (6.1b) を少し一般化する。

Ω は $\mathbb{R}^n$ $(n=2,3)$ の領域、その境界 $\Gamma:=\partial\Omega$ は

$$\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2,\quad \Gamma_1\cap\Gamma_2=\emptyset$$

と分割されていて、$f\colon\Omega\to\mathbb{R}$, $g_1\colon\Gamma_1\to\mathbb{R}$, $g_2\colon\Gamma_2\to\mathbb{R}$ が与えられたとする。また $\boldsymbol{n}$ は、Γ_2 上の点における外向き単位法線ベクトルとする。

このとき $u\colon\overline{\Omega}\to\mathbb{R}$ で、次の方程式を満たすものを求めることを考える。

(6.2a) $$-\triangle u=f \quad (\text{in } \Omega)$$

(6.2b) $$u=g_1 \quad (\text{on } \Gamma_1)$$

(6.2c) $$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}=g_2 \quad (\text{on } \Gamma_2).$$

[1] $\Gamma_1=\emptyset$ のときだけ、$\displaystyle\int_\Omega f\,d\boldsymbol{x}+\int_{\partial\Omega} g_2\,d\sigma=0$ という条件が必要になる。

(6.2a) は有名な偏微分方程式で、**Poisson方程式**(ポアソン)と呼ばれる。

(6.2b), (6.2c) はそれぞれDirichlet(ディリクレ)境界条件, Neumann(ノイマン)境界条件と呼ばれる。
Poisson 方程式は、楕円型偏微分方程式の典型例であり、様々な現象のモデルに登場する。

重力場 f は (質量分布の) 密度, ϕ はポテンシャル・エネルギー

静電場 f は電荷密度, ϕ は電位

熱平衡 f が発生する熱量, ϕ は温度

この問題は数学的に非常に詳しく研究されてきた。一般に解の存在が証明できたのは 20 世紀に入ってからである。

その中でも $f=0$ の場合 (Laplace 方程式 $\triangle u = 0$) がとりわけ重要である。**ポテンシャル問題**と呼ばれる。これは関数論においても、多くの基本的な結果を得るための基礎となる (調和関数を決定する問題が解ける)。

ポテンシャル問題には、**差分法** (FDM, finite difference method)、**有限要素法** (FEM, finite element method) をはじめとする多くの数値解法が適用できる。特に Laplace 方程式の場合は、**基本解の方法** (method of fundamental solution) が有効である。

6.3 Riemann の写像定理 (復習 — 再掲)

6.3.1 双正則, Riemann の写像定理

関数論で基本的な Riemann の写像定理を説明する (1 次分数変換のとき、一瞬顔を出した)。

定義 6.1 (双正則) U と V は $\widehat{\mathbb{C}}$ の領域, $\varphi\colon U \to V$ とする。φ が**双正則**(そうせいそく)であるとは、φ が正則かつ全単射かつ φ^{-1} も正則であることをいう。

数学では、しばしば同型写像, 同型という概念が登場する。双正則写像は関数論としての同型写像と言える。

定理 6.2 (Riemann の写像定理, 1851 年) Ω は $\mathbb{C}$ の単連結領域で、$\Omega \neq \mathbb{C}$ であるとする。このとき双正則写像 $\varphi\colon \Omega \to D(0;1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ が存在する。

証明は省略する (例えば Ahlfors [1], 高橋 [2] を見よ)。

φ のことを、**領域 Ω の等角写像**、あるいは**領域 Ω の写像関数**と呼ぶ。

いくつか簡単な形の領域の写像関数を、1 次分数変換で具体的に求めることができる (簡単なものしか紹介していない)。
$\mathbb{C}$ の単連結領域で $\mathbb{C}$ と異なるものは、関数論的には円盤領域と同型である、ということになる。

系 6.3 $\mathbb{C}$ 内の単連結領域で $\mathbb{C}$ とは異なるものは互いに同相 (位相同型) である。

証明 Ω_1, Ω_2 が $\mathbb{C}$ とは異なる $\mathbb{C}$ の単連結領域とすると、双正則写像 $\varphi_1\colon \Omega_1 \to D(0;1)$, $\varphi_2\colon \Omega_2 \to D(0;1)$ が存在する。このとき $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ は双正則である。特に同相写像であるので、Ω_1 と Ω_2 は同相である。 ■

6.3.2 正規化条件

単連結領域 $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ が与えられたとき、Ω の写像関数は一意的には定まらない。定めるためには追加の条件が必要だが、次のものが有名である。

命題 6.4 (写像関数の決定) Ω は $\mathbb{C}$ の単連結領域で、$\Omega \neq \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ とする。このとき、双正則写像 $\varphi\colon \Omega \to D(0;1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ で

$$\varphi(z_0) = 0, \quad \varphi'(z_0) > 0 \tag{6.3}$$

を満たすものは一意的である。

(6.3) を**正規化条件**と呼ぶ。

証明 (あらすじ) φ_1, φ_2 が条件を満たせば、$\varphi := \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ は D_1 から D_1 への双正則写像で、$\varphi(0) = \varphi_2(\varphi_1^{-1}(0)) = \varphi_2(z_0) = 0$, $\varphi'(0) = \varphi_2'(z_0) \cdot \frac{1}{\varphi_1'(z_0)} > 0$. この条件を満たす φ は恒等写像に限られるので、$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} = \mathrm{id}_{D_1}$。ゆえに $\varphi_2 = \varphi_1$. ■

6.4 Jordan 領域の写像関数

6.4.1 Jordan 曲線定理

平面内の単連結領域の重要な例として、以下に紹介する Jordan 領域がある。Jordan 領域の写像関数はポテンシャル問題を解いて求まる (すぐ後)。

定理 6.5 (Jordan 曲線定理 (Jordan-Schöflies)) 平面内の任意の単純閉曲線 C に対して、ある領域 U_1, U_2 が存在して、U_1 は有界、U_2 は非有界、さらに

$$\mathbb{C} = U_1 \cup C^* \cup U_2, \quad U_1 \cap U_2 = \emptyset, \quad U_1 \cap C^* = \emptyset, \quad U_2 \cap C^* = \emptyset.$$

ただし、C^* は C の像とする。さらに C^* は U_1, U_2 の共通の境界である。
さらに U_1 は円盤領域、U_2 は円の外部領域とそれぞれ同相である。

(曲線が単純とは、自分自身と交わらないことを意味する。)

単純閉曲線のことを **Jordan 曲線** (あるいは Jordan 閉曲線) とも呼ぶ。

単純閉曲線 C に対して、定理で存在を保証される U_1 を、***C* の囲む Jordan 領域**と呼ぶ。

定理 6.5 は直観的に納得しやすいが、証明はなかなか面倒ということで有名である。ここでは省略する。桂田 [3] の付録 H に周辺事情を少し書いてある。

6.4.2 Carathéodory の定理

定理 6.6 (Carathéodory の定理) C を $\mathbb{C}$ 内の Jordan 曲線、Ω を C の囲む Jordan 領域、$\varphi\colon \Omega \to D(0;1)$ を双正則とするとき、φ は同相写像 $\tilde{\varphi}\colon \overline{\Omega} \to \overline{D}(0;1)$ に拡張できる。

有名な定理であるが、証明が載っているテキストが意外と少ない (手持ちのテキストで載っているものを探したのだけれど…有名な Ahlfors [1] も give up している)。少し古いけれど、辻 [4] を見るのかもしれない。私自身はチェックしていないが、Wikipedia `https://en.wikipedia.org/wiki/Carath%C3%A9odory%27s_theorem_(conformal_mapping)` に証明の情報がある。

6.4.3 ポテンシャル問題への帰着

$\mathbb{C}$ 内の Jordan 領域は単連結であるから、Ω の写像関数が存在する。

Jordan 領域 Ω と $z_0 \in \Omega$ に対して、正規化条件 $\varphi(z_0) = 0$, $\varphi'(z_0) > 0$ を満たす写像関数 $\varphi\colon \Omega \to D(0;1)$ は、次の定理に基づき求められる。

定理 6.7 (Jordan 領域の写像関数) Ω を $\mathbb{C}$ 内の Jordan 領域、$z_0 \in \Omega$ とする。u を、Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題

(6.4a) $$\triangle u = 0 \quad (\text{in } \Omega)$$

(6.4b) $$u(x,y) = -\log|z - z_0| \quad (z = x + iy \in \partial\Omega).$$

の解、v を u の共役調和関数で $v(z_0) = 0$ を満たすものとするとき

$$\varphi(z) := (z - z_0)\exp\left(u(z) + iv(z)\right)$$

は、Ω の写像関数であり、正規化条件を満たす。

駆け足の証明 (2 ページ) 後述の Carathéodory の定理により、φ を $\overline{\Omega}$ から $\overline{D}(0;1)$ への同相写像に拡張できることが分かる。それを同じ記号 φ で表す。

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\varphi(z)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{\varphi(z) - \varphi(z_0)}{z - z_0} = \varphi'(z_0)$$

であるから、z_0 は $\dfrac{\varphi(z)}{z - z_0}$ の除去可能特異点である。以下 $\dfrac{\varphi(z)}{z - z_0}$ を $\overline{\Omega}$ で連続に拡張した写像を ψ で表す。ψ は Ω では正則である。

実は $\psi(z) \neq 0$ $(z \in \Omega)$ である。(実際、$z \in \Omega \setminus \{z_0\}$ とするとき $\varphi(z) \neq \varphi(z_0) = 0$ であるから $\psi(z) \neq 0$. 一方、φ は単射であるから $\varphi'(z_0) \neq 0$ が成り立つので、$\psi(z_0) = \varphi'(z_0) \neq 0$.)

Ω は単連結であるから、$\log\psi(z) = \log\frac{\varphi(z)}{z - z_0}$ の Ω で一価正則な分枝が定まる。

その実部、虚部を u, v とする。

(6.5) $$\log\frac{\varphi(z)}{z - z_0} = u(z) + iv(z).$$

u は調和関数であり、v は u の共役調和関数である。

$z \in \partial\Omega$ のとき $|\varphi(z)| = 1$ であるから

$$u(z) = \log\left|\frac{\varphi(z)}{z - z_0}\right| = -\log|z - z_0| \quad (z \in \partial\Omega).$$

ゆえに u は、次の Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題の解である。

(6.6a) $$\triangle u = 0 \quad (\text{in } \Omega),$$

(6.6b) $$u(z) = -\log|z - z_0| \quad (z \in \Omega).$$

v は u の共役調和関数であることから、定数差を除き定まる。例えば、z_0 を始点、$z \in \Omega$ を終点とする Ω 内の曲線 C_z を取って

$$v(z) := \int_{C_z} (v_x\,dx + v_y\,dy) = \int_{C_z} (-u_y\,dx + u_x\,dy)$$

とすればよい (Ω は単連結であるから、v の値は確定する)。

(6.5) を φ について解くと

$$\varphi(z) = (z - z_0) \exp(u(z) + iv(z)).$$

これから $\varphi(z_0) = 0$.

また

$$\begin{aligned}\varphi'(z) &= \exp(u(z) + iv(x)) + (z - z_0)(u'(z) + iv'(z)) \exp\left(u(z) + iv(z)\right),\\ \varphi'(z_0) &= \exp(u(z_0) + iv(z_0)).\end{aligned}$$

これから、$\varphi'(z_0) > 0 \Leftrightarrow v(z_0) \equiv 0 \pmod{2\pi} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad v(z_0) = 2k\pi$. どの k でも φ は変わらないので $k = 0$. すなわち $v(z_0) = 0$ で v を定めれば良い。■

時間配分の問題から、7「FreeFEM を体験しよう」は早めにやりたいので、次の「Dirichlet の原理」,「ポテンシャル問題の数値解法」を後回しにした。

6.5 Dirichlet の原理 (次回に回す)

Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題

$$\triangle u = 0 \quad (\text{in } \Omega), \tag{6.7a}$$

$$u = g \quad (\text{on } \partial\Omega) \tag{6.7b}$$

の解 u の存在を示すため、Riemann は次のように考えた。

境界条件 (6.7b) を満たす関数の全体 X と、X 上の汎関数 J を考える。

$$X := \left\{u \;\middle|\; u\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R},\ (\forall x \in \partial\Omega)\ u(x) = g(x)\right\},$$

$$J[u] := \iint_\Omega \left(u_x^2 + u_y^2\right) dx\, dy \quad (u \in X).$$

Dirichlet の原理

J の最小値を与える u は $\triangle u = 0$ (in Ω) を満たす。

したがって J の最小値を与える u は (6.7a), (6.7b) の解である。

Riemann (1826–1866) は、Dirichlet (1805–1859) 先生の講義の中で Dirichlet の原理を聴いたそうである。

6.5.1 証明

証明

$v\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ は、条件 $v = 0$ (on $\partial\Omega$) を満たす任意の関数とする。任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $u + tv = g + t \cdot 0 = g$ (on $\partial\Omega$). ゆえに $u + tv \in X$ である。仮定より

$$f(t) := J[u + tv] \quad (t \in \mathbb{R})$$

は $t = 0$ で最小値をとる。

ところが

$$f(t) = J[u] + 2t \iint_\Omega (u_x v_x + u_y v_y) dx\, dy + t^2 \iint_\Omega \left(v_x^2 + v_y^2\right) dx\, dy$$

は t の 2 次関数であり、$t = 0$ で最小となるので、1 次の係数は 0 である:

$$\iint_\Omega (u_x v_x + u_y v_y)\, dx\, dy = 0. \tag{6.8}$$

Green の公式 $\left(\iint_\Omega \triangle u v\, dx\, dy = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v\, d\sigma - \iint_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx\, dy\right)$ より

$$\iint_\Omega \triangle u\, v\, dx\, dy = 0.$$

これが任意の v について成り立つことから (**変分法の基本補題により**)

$$\triangle u = 0 \quad (\text{in } \Omega).\blacksquare$$

6.5.2 反省

Riemann は、汎関数 $J[u]$ を最小にする $u \in X$ の存在は明らかだと考えた。

> J は下に有界 ($J[u] \geq 0$) であるから、J は下限を持つ。それは最小値のはず…

それに Weierstrass が疑義を呈した (「下限は本当に最小値？」とツッコミを入れた)。これに Riemann は存命中に答えられなかった。

現代的な解説をすると、関数空間は無限次元空間なので、有界閉集合上の連続関数であっても、最小値を持たないことがありえる。

ポテンシャル問題は重要なため、解の存在について、多くの人が努力して Dirichlet 原理を用いない証明がいくつか発見されたが、Riemann の発表から約 50 年後 (1900 年頃)、D. Hilbert が Dirichlet 原理に基づく証明を発表し、肯定的に解決した。

今では解の存在証明は、このルートをたどるのがスタンダードになっている。…でも応用複素関数としては、ここから数値計算法に舵を切る (存在証明については、関数解析か偏微分方程式論で学んでください)。
以上の話は、少し込み入っていて、初めて聴く人には分かりにくいと思われるので、振り返っておこう。

- Riemann の写像定理という関数論で基本的と考えられている定理がある。それは領域の写像関数の存在に関する定理である。
- Jordan 曲線 (単純閉曲線) で囲まれた領域[2]の写像関数は、Laplace 方程式のある Dirichlet 境界値問題を解くことで求まる。
- Riemann は、その境界値問題が次のように解けると主張した:
  汎関数 $J[u] := \iint_\Omega (u_x^2 + u_y^2) dxdy$ の最小化問題 (変分問題) が解ければ良い ($\because$ Dirichlet の原理)。この J の最小値の存在は明らか。

  $\rightarrow$ ツッコミが入って、頓挫したが、結局は解決された。

[2]穴が空いていないということで、最も単純と考えられる。

最小性は

$$\iint_\Omega (u_x v_x + u_y v_y)\,dx\,dy = 0 \quad (v \text{ は条件 } v = 0 \text{ on } \partial\Omega \text{ を満たす任意の関数})$$

という条件と同値である。この式は**弱形式**と呼ばれる。**有限要素法**という数値解法では、微分方程式の近似解を弱形式の解として求める。

6.6 ポテンシャル問題の数値解法 (1) 有限要素法

ポテンシャル問題を数値的に解くことを考えよう。この「応用複素関数」では、**有限要素法**と**基本解の方法**を簡単に紹介する。

差分法で解くこともできるが、長方形領域でない問題を解くには工夫が必要になり、あまり便利でない。

有限要素法の主たるアイディアは次の 2 つ:

(1) **弱形式**を用いる。

(2) 領域を三角形、四面体などの**有限要素**に分割し、近似解や試験関数に**区分的多項式**を採用する。

この講義では有限要素法の詳細は解説できないが、幸い **FreeFEM** というソフトを用いると、弱形式さえ分かれば、有限要素についてはソフトに任せにして、数値計算ができる。

実は Dirichlet 原理の証明中に現れた (6.8) は Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題の弱形式である。(弱形式については、次回解説を行う。)

今回は「百聞は一見にしかず」で、 まずはプログラム (スライド 1 枚) を紹介する。
2,3 行書き換えるだけで「自分の問題」が解ける。

```
// potential2d-v0.edp ---  2 次元非圧縮ポテンシャル流
//  速度ポテンシャル，速度を求め、等ポテンシャル線，速度場を描く
border Gamma(t=0,2*pi) { x = cos(t); y = sin(t); } // 円盤領域
int m=40;
mesh Th=buildmesh(Gamma(m));
plot(Th, wait=1, ps="Th.eps");
// 次の 2 行は区分 1 次多項式を使うという意味
fespace Vh(Th,P1);
Vh phi, v, v1, v2;
// 境界条件の設定
func Vn=x+2*y; // Ωが単位円で，V=(1,2) のとき V・n=x+2y

// 速度ポテンシャルφを求め、その等高線（等ポテンシャル線）を描く
solve Laplace(phi,v) =
  int2d(Th)(dx(phi)*dx(v)+dy(phi)*dy(v)) -int1d(Th,Gamma)(Vn*v);
plot(phi,ps="contourpotential.eps",wait=1);
// ベクトル場 (v1,v2)=∇φ を描く（ちょっと雑なやり方)
v1=dx(phi); v2=dy(phi);
plot([v1,v2],ps="vectorfield.eps",wait=1);

// 等ポテンシャル線とベクトル場を同時に描く
plot([v1,v2],phi,ps="both.eps", wait=1);
```

7 FreeFEM を体験しよう

7.1 FreeFEM とはどういうものか

FreeFEM は、2 次元, 3 次元領域における偏微分方程式の問題を**有限要素法** (finite element method) で解くための、一種の PSE (problem solving environment) である。

(FreeFEM は、以前は FreeFem++ と呼ばれていたが、少し前に FreeFEM と呼ぶことになったようである。もっともコマンド名は今でも `FreeFem++` である。)

パリ第 6 大学 J. L. Lions 研究所の Frédéric Hecht, Oliver Pironneau, A. Le Hyaric, 広島国際学院大学の大塚厚二氏らが開発した。

ソースコードとマニュアル (700 ページ超、幸い英文)、主なプラットホーム (Windows, Mac, Linux) 向けの実行形式パッケージがフリーで提供されている。

従来のプログラミング言語では、短くても数百行のプログラムを書く必要があったような問題が、十数行のプログラム (スライド 1 枚に入ったりする) を書くだけで解けてしまったりする。

1. **FreeFEM の WWW サイト**

   分厚い事例集 (マニュアル?) Hecht [5] がある。
   パラパラしてみると、どういうことが出来るか分かる。

2. 大塚・高石 [6] という日本語の解説書がある (現在品切だが、明治大学の学生は、図書館あるいは Maruzen eBook で読める)。

3. 色々な WWW サイトがある (その多くは信頼できる)。

   まず自作を紹介しておくと

   - 「FreeFEM の紹介」
   - 「FreeFem++ ノート」

   日本応用数理学会のチュートリアルの資料&サンプル・プログラム

   - 鈴木厚「ソフトウェアセミナー：FreeFem++による有限要素プログラミング －中級編－」(2016/2/11,12)
   - 鈴木厚「ソフトウェアセミナー：FreeFem++による有限要素プログラミング －上級編－」(2016/6/4,5)

7.2 入手とインストール

2026/6/23 時点で、Mac 向けは version 4.15 が最新版である。

FreeFEM v4.15
`https://github.com/FreeFem/FreeFem-sources/releases/tag/v4.15`

から入手する。入手すべきファイルは、使っている Mac によって異なる。

- Apple Silicon Mac: `FreeFEM-v4.15-175-g822d1d2e9-Apple-Silicon-0.dmg`
  `https://github.com/FreeFem/FreeFem-sources/releases/download/v4.15/FreeFEM-v4.15-175-g822d1d2e9-Apple-Silicon-0.dmg` (行が継続している)

- Intel Mac: `FreeFEM-v4.15-Intel-0.dmg`

  https://github.com/FreeFem/FreeFem-sources/releases/download/v4.15/FreeFEM-v4.15-Intel-0.dmg

Intel Mac の場合は、(使っている人はベテランだと思うので) とりあえず自分でやってみて下さい。うまくいかなかったら気軽に相談して下さい。

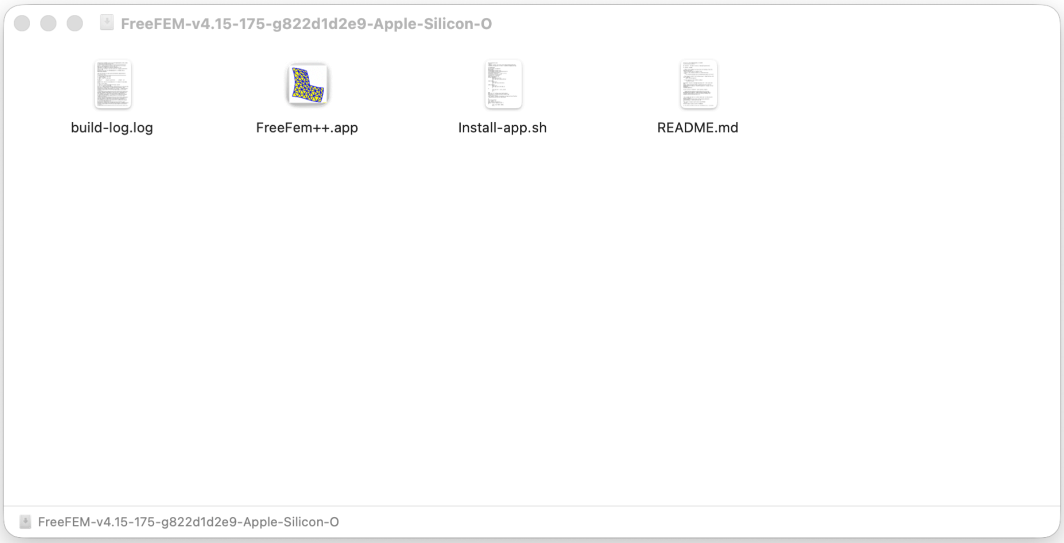
ターミナルでやる場合の入手手順 (正しくコピー出来たかの確認を含む)

```
% curl -OL https://github.com/FreeFem/FreeFem-sources/releases/download/v4.15/FreeFEM-v4.15-175-g822d1d2e9-Apple-Silicon-0.dmg
% sha256 FreeFEM-v4.15-175-g822d1d2e9-Apple-Silicon-0.dmg
SHA256 (FreeFEM-v4.15-175-g822d1d2e9-Apple-Silicon-0.dmg) = 85e8f94b341a384f09d22846fe30ca0ffd7ca377e1fc8a27a158919d38349889
```

SHA256 の値は、https://github.com/FreeFem/FreeFem-sources/releases/tag/v4.15 に書いてあるもので確認して下さい。

(sha256 とか sha512 は古い macOS にはないが、最近の macOS では `/sbin` に入っている。) インストール手順は、

1. Finder で、`FreeFEM-v4.15-175-g822d1d2e9-Apple-Silicon-0.dmg` をダブル・クリックする。



   のようなウィンドウが出る (ディスク・イメージ・ファイル (`.dmg`) をマウント出来た)。

2. ターミナルから、インストール・スクリプト `Install-app.sh` を実行する。

   ターミナルで以下を実行 (% はプロンプトで自分で打つものではない)

   ```
   % cd /Volumes/FreeFEM*
   % bash ./Install-app.sh
   ```

   (スクリプト `Install-app.sh` の中で sudo をしているので、パスワードの入力を要求されることがある。画面に何も表示されないが、あわてずに入力して、最後に enter キーをタイプする。)

   色々と画面表示されて、Error というのも見えるが、これはスクリプトにミスがあるためで、こちらのせいではない (だれがやってもそうなる)。ミスがあるのは動作確認部分で、インストール自体は (単なるコピーなので) 正常に終了している可能性が高い。動作チェックは次で行う。

3. (ここまででインストールは済んでいるはずだが、正常に動作することを確認する。) ターミナルを新しく開いて、以下のコマンドを順番に実行して下さい。(ウィンドウを出すごとに一時停止していて、先に進めるには enter キーをタイプする。最後に esc キーをタイプして終了する。)

```
curl -O https://m-katsurada.sakura.ne.jp/program/freefem/poisson.edp
cat poisson.edp
FreeFem++ poisson.edp

curl -O https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2/potential2d-v0.edp
cat potential2d-v0.edp
FreeFem++ potential2d-v0.edp
```

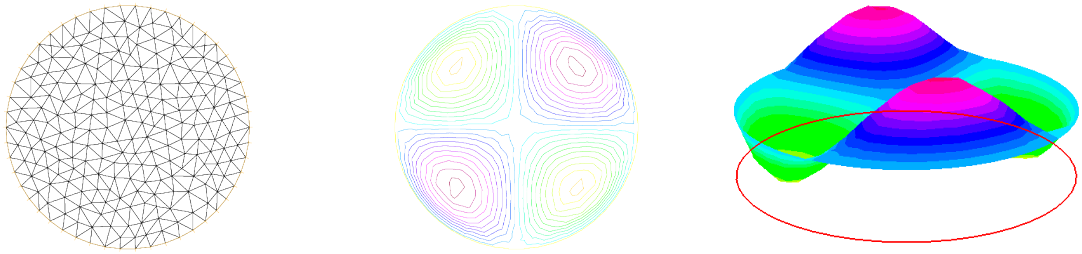


図 1: `poisson.edp` の結果: 三角形分割, 有限要素解の等高線表示, グラフの鳥瞰図

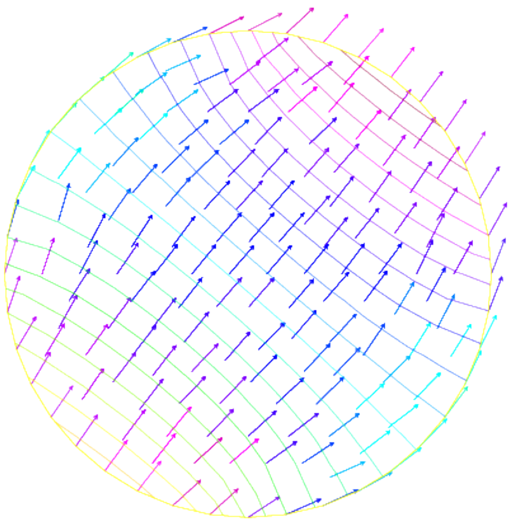


図 2: `potential2d-v0.edp` の結果: 流線と速度場

いずれにせよ、トラブルが生じたら気軽に相談して下さい。

文法は C 言語に似ているので、見様見真似でプログラムが書けると思われるが、簡単な説明を用意する予定である。

8 参考文献

参考文献

[1] Ahlfors, L. V.: *Complex Analysis*, McGraw Hill (初版は 1953 で、最新版である Third Edition は 1979/1/1？私は 1979 年の秋に教科書として購入した).

[2] 高橋礼司：複素解析, 東京大学出版会 (1990), 最初、筑摩書房から 1979 年に出版された．丸善 eBook では、https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000049441 でアクセスできる．

[3] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2026/complex2026.pdf (2014〜).

[4] 辻正次：複素函数論, 槙書店 (1968).

[5] Hecht, F.: Freefem++ (マニュアル), https://github.com/FreeFem/FreeFem-doc/raw/pdf/FreeFEM-documentation.pdf, 以前は http://www3.freefem.org/ff++/ftp/freefem++doc.pdf にあった。(??).

[6] 大塚厚二, 高石武史：有限要素法で学ぶ現象と数理 — FreeFem++数理思考プログラミング —, 共立出版 (2014), https://sites.google.com/musashino-u.ac.jp/freefem/home/book/OT2014 というサポート WWW サイトがある．Maruzen eBook に入っているので、https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000018545 でアクセス出来る．