応用複素関数 第 8 回

桂田 祐史
katurada@meiji.ac.jp

2026 年 6 月 9 日, 2026 年 6 月 17 日

目次

今日を含めて 2 回で「流体力学への複素関数の応用」を終える予定であったが、少し内容が増えてしまったので、はみ出すかもしれない。

桂田 [1] が講義ノートと言ってあるが、この文書に書かれていることの中には、[1] には書いていない新しいことも書いてある。

5 流体力学への複素関数の応用 (続き)

先週の内容はある程度聞き流して、必要に応じて参照すれば良いが、本日は頑張って聞いて下さい。

5.4　物質微分 (忘れ物を追加)

(2026/6/2 の講義で書き忘れたので追加) ベクトル値関数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)=\begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{x},t) \\ f_2(\boldsymbol{x},t) \\ f_3(\boldsymbol{x},t) \end{pmatrix}$ に対しても

$$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{f} := \begin{pmatrix} (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)f_1 \\ (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)f_2 \\ (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)f_3 \end{pmatrix}, \quad \frac{D\boldsymbol{f}}{Dt} := \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} \frac{Df_1}{Dt} \\ \frac{Df_2}{Dt} \\ \frac{Df_3}{Dt} \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

と定義する。(Cf. $\dfrac{d\boldsymbol{f}}{dt}=\begin{pmatrix} \frac{df_1}{dt} \\ \frac{df_2}{dt} \\ \frac{df_3}{dt} \end{pmatrix}$ は知っているだろうけれど、同様に納得しろは無理ですね。きちんと定義しておくべきでしょう。)

これを定義しておかないと、加速度の議論が出来ない。すみません。

5.12　ポテンシャル流 (続き)

5.12.1 は前回やったけれど、念のため再録。

5.12.1　ポテンシャル, 渦無し (再録)

ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ に対して、

$$\boldsymbol{v}=\nabla\phi \quad (\boldsymbol{v}=\operatorname{grad}\phi \text{ とも書ける}) \tag{5.2}$$

を満たす ϕ が存在するとき、ϕ を $\boldsymbol{v}$ の**ポテンシャル** と呼ぶ。特に $\boldsymbol{v}$ が速度場のとき、ϕ を $\boldsymbol{v}$ の**速度ポテンシャル**と呼ぶ。

速度ポテンシャルが存在する流れを、**ポテンシャル流**であるという。

ポテンシャル流は渦なしである。

($\because$ 一般に $\operatorname{rot}\operatorname{grad}=\mathbf{0}$ が成り立つので、$\boldsymbol{\omega}=\operatorname{rot}\boldsymbol{v}=\operatorname{rot}\operatorname{grad}\phi=\mathbf{0}$.)

単連結領域における渦なしの流れはポテンシャル流である。

($\because$ これもベクトル解析の常識 — この PDF の末尾で少し説明)

- 一般には、渦なしであっても、ポテンシャル流であるとは限らない。
- 任意の開球は単連結領域であるから、渦なしの流れは局所的にはポテンシャルを持つことが分かる。
- 多価関数のポテンシャルを認めると、より一般の渦なしの流れのポテンシャルが存在することが分かる。

粗くまとめると

渦なしの流れ ≒ ポテンシャル流

5.12.2 Euler 方程式のポテンシャル流と Laplace 方程式の Neumann 境界値問題

以下に現れる関数は、$\boldsymbol{x}$ だけの関数としても良いし (例えば $\phi=\phi(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$, $p=p(\boldsymbol{x})$)、$\boldsymbol{x}$ と t の関数としても良い (例えば $\phi=\phi(\boldsymbol{x},t)$, $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$, $p=p(\boldsymbol{x},t)$)。

5.12.1 では、運動方程式について言及しなかった。実は、非圧縮非粘性流の運動方程式である Euler 方程式と組み合わせると上手く行く。以下にこれを見てみよう。

領域 Ω における速度場 $\boldsymbol{v}$ が、**速度ポテンシャル ϕ を持つ**とすると、

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v}=\operatorname{div}\operatorname{grad}\phi=\triangle\phi.$$

さらに流れが**非圧縮** ($\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0$) と仮定すると

$$\triangle\phi=0.$$

一方、領域の境界 $\partial\Omega$ 上の点において、

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=\nabla\phi\cdot\boldsymbol{n}=\frac{\partial\phi}{\partial n}.$$

(青字で書いたものは一般に成り立つ公式である。)

ゆえに ϕ は、次の **Laplace 方程式の Neumann 境界値問題**の解である。

$$\triangle\phi=0 \quad (\text{in } \Omega) \tag{5.3a}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} \quad (\text{on } \partial\Omega). \tag{5.3b}$$

他の講義で学んだ人も多いかもしれないが念のため

- 未知関数 ϕ についての偏微分方程式 (5.3a) を Laplace 方程式と呼ぶ。
- g を既知関数とするとき、方程式 $\dfrac{\partial\phi}{\partial n}=g$ (on $\partial\Omega$) を Neumann 境界条件と呼ぶ。
- Laplace 方程式と Neumann 境界条件を満たす関数を求めよ、という問題を Laplace 方程式の Neumann 境界値問題とよぶ。

もしも $\boldsymbol{v}$ の $\partial\Omega$ での値が既知ならば、この問題を解いて ϕ が (ゆえに $\boldsymbol{v}=\operatorname{grad}\phi$ も) 求まる。

解の一意性は成り立たない。実際、ϕ が解であるとき、それに任意の定数 C を足した $\phi+C$ も解となる。しかし、解はその形のものに限られること ($\widetilde{\phi}$ が解ならば、ある定数 C が存在して $\widetilde{\phi}=\phi+C$ となること) が証明できる。このようなとき「解は定数差を除いて一意的である」という。別の言い方をすると

$$\{\phi+C \mid C\in\mathbb{R}\}$$

が解の全体となる。

問 1. Green の積分公式のうちの 1 つ

$$\int_\Omega \triangle u\, v\, d\boldsymbol{x}=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}v\, d\sigma-\int_\Omega \operatorname{grad}u\cdot\operatorname{grad}v\, d\boldsymbol{x} \tag{5.4}$$

を用いて、Laplace 方程式の Neumann 境界値問題 (5.3a), (5.3b) の 2 つの解 ϕ_1, ϕ_2 は $\phi_1-\phi_2=$ 定数 を満たすことを示せ。 **解答へ**

一般に、Lalplace 方程式の境界値問題のことを**ポテンシャル問題**と呼ぶことがある。ポテンシャル問題は頻出することもあって、数値解法もよりどりみどりである (流体力学への応用が終わった後で、いくつか紹介する)。

実は、Laplace 方程式の Neumann 境界値問題 (5.3a), (5.3b) の解が存在するためには、ある条件が必要である。

命題 5.1 (Laplace 方程式の Neumann 境界値問題の解の存在) Ω は $\mathbb{R}^d$ $(d=2,3)$ 内の領域で、その境界は滑らかとする。また $g\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ は連続とする。Laplace 方程式の Neumann 境界値問題

$$\triangle\phi = 0 \quad (\text{in } \Omega) \tag{5.5a}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = g \quad (\text{on } \partial\Omega) \tag{5.5b}$$

の解が存在するためには、

$$\int_{\partial\Omega} g\, d\sigma = 0 \tag{5.6}$$

を満たすことが必要十分である。

証明　必要性: ((5.5b), Gauss の発散定理, 公式 $\operatorname{div}\operatorname{grad} = \triangle$, (5.5a) を順番に用いて

$$\int_{\partial\Omega} g\, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \operatorname{grad}\phi\cdot\boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div}\operatorname{grad}\phi\, d\boldsymbol{x} = \int_{\Omega} \triangle\phi\, d\boldsymbol{x} = \int_{\Omega} 0\, d\boldsymbol{x} = 0.$$

十分性の証明はやや難しいので、ここでは省略する。 ■

上の流れの問題 $(g = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})$ では、条件 (5.6) はつねに満たされる。実際、非圧縮 $\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$ を仮定しているので、Gauss の発散定理から

$$\int_{\partial\Omega} g\, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div}\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x} = \int_{\Omega} 0\, d\boldsymbol{x} = 0.$$

速度場 $\boldsymbol{v}$ は Laplace 方程式の Neumann 境界値問題の解として求まることが分かったが、圧力 p はどう求めれば良いだろうか？ここで Euler 方程式の出番となる。まず準備として、一般に

$$\nabla\left(\phi_x^2+\phi_y^2+\phi_z^3\right) = 2\begin{pmatrix}\phi_x\phi_{xx}+\phi_y\phi_{yx}+\phi_z\phi_{zx}\\ \phi_x\phi_{xy}+\phi_y\phi_{yy}+\phi_z\phi_{zy}\\ \phi_x\phi_{xz}+\phi_y\phi_{yz}+\phi_z\phi_{zz}\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}\nabla\phi\cdot\nabla\phi_x\\ \nabla\phi\cdot\nabla\phi_y\\ \nabla\phi\cdot\nabla\phi_z\end{pmatrix}.$$

これから、ϕ が速度ポテンシャルである $(\nabla\phi = \boldsymbol{v})$ 場合は

$$\nabla\left(\phi_x^2+\phi_y^2+\phi_z^3\right) = 2\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}\cdot\nabla v_1\\ \boldsymbol{v}\cdot\nabla v_2\\ \boldsymbol{v}\cdot\nabla v_3\end{pmatrix} = 2\left(\boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{v}$$

が成り立つことが分かる。Euler 方程式

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p$$

は

$$\nabla\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\phi_x^2+\phi_y^2+\phi_z^2\right) + \frac{1}{\rho}p\right) = 0$$

と書き直せる。これから次の定理を得る。

定理 5.2 (Laplace 方程式の Neumann 境界値問題の解は Euler 方程式の渦なし解に対応する)

$$\triangle\phi = 0 \quad (\text{in } \Omega), \qquad \frac{\partial\phi}{\partial n} = g \quad (\text{on } \partial\Omega)$$

を満たす $\phi = \phi(\boldsymbol{x}, t)$ が存在したとする。このとき

$$\boldsymbol{v} := \operatorname{grad}\phi, \tag{5.7a}$$

$$p := -\frac{1}{2}\left(\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2\right) - \frac{\partial\phi}{\partial t} \tag{5.7b}$$

とおくと、$\boldsymbol{v}$ は $\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ (渦なし), $\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$ (非圧縮条件) を満たし、$\boldsymbol{v}$ と p は Euler 方程式の解となる。

(5.7b) は

$$p + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{v}\|^2 + \frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \tag{5.8}$$

とも書ける。これを **Bernoulli の等式**と呼ぶ。

証明　一般に $\operatorname{rot}\operatorname{grad} = \boldsymbol{0}$ であるから

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = \operatorname{rot}\operatorname{grad}\phi = \boldsymbol{0}.$$

また、$\boldsymbol{v}$ が非圧縮条件を満たすことは次のようにして分かる。

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = \operatorname{div}\operatorname{grad}\phi = \triangle\phi = 0.$$

Euler 方程式を満たすことは問題とする。■

問 2. 証明を完成させよ。$\boldsymbol{v}$ と p が Euler 方程式を満たすことを示せ。 **解答へ**

注意 5.3 (色々な Bernoulli の定理) 流体力学には Bernoulli の定理と呼ばれる定理があるが、実は 1 つの定理ではなくて、いくつものバージョンがある。上にあげた (5.7b) はその 1 つ、ということである。物理的には、運動方程式 (Euler 方程式) を積分したものだから、エネルギー保存則に相当する。

少し一般的に説明してみる。一般に (ベクトル解析の公式として、かな)

$$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{b} = \nabla\left(\frac{1}{2}q^2\right) = \boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{v})$$

が成り立つ。ただし $q := \|\boldsymbol{v}\|$ とおいた。

次の問の解答中にある式をとにかく積分できるような仮定をおく、という感じである (渦なしと仮定したり、流線に沿って積分することにしたり、外力があっても保存力としたり、密度を定数としたり、バロトロピックな流体としたり$\cdots$)。■

問 3. Euler 方程式 $\rho\dfrac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = -\nabla p$ で支配される流体の運動を考える。密度 ρ は正の定数とする。

(i) 3 次元ベクトル場 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ に対して、

$$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v} = \nabla\left(\frac{1}{2}\|\boldsymbol{v}\|^2\right) - \boldsymbol{v}\times(\operatorname{rot}\boldsymbol{v})$$

が成り立つことを示せ。

(ii) C を流線とするとき

$$\int_C (\boldsymbol{v} \times (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v})) \cdot d\boldsymbol{r} = 0$$

が成り立つことを示せ。

(iii) 任意の流線に沿って、

$$\frac{1}{2}\|\boldsymbol{v}\|^2 + \frac{1}{\rho} p$$

は定数であることを示せ。

解答へ

5.12.3 まとめ

3 次元で、非圧縮のポテンシャル流は、Laplace 方程式の Neumann 境界値問題を解くことで求まるが分かった。それは実は Euler 方程式の解である。

2 次元の場合も同様のことが成り立つが、実はより便利に、複素関数論が適用できる、という話を以下で紹介する。

(一方、2 次元の Laplace 方程式の境界値問題は、複素関数論のあちこちで登場する。直接的に正則関数が登場しないが、複素関数論の項目の一つと考えるべきかもしれない。)

5.13 2 次元流

途中で話がふくらみ、こんなにたくさん覚えられるかな？となるけれど、複素関数が出て来てシンプルな結論に落ち着く。

5.13.1 2 次元流の渦度, 渦無しの流れ

速度場 $\boldsymbol{v}$ が $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) = \begin{pmatrix} u(x,y,t) \\ v(x,y,t) \\ 0 \end{pmatrix}$ の形をしているとき、流れは 2 次元的, **2 次元流**であるという (このとき、$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z} = 0$, $\boldsymbol{v}$ の z 成分 $= 0$. 逆は必ずしも真ではない。)。

このとき渦度は

$$\boldsymbol{\omega} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

そこで、2 次元ベクトル場 $\boldsymbol{v}(x,y,t) = \begin{pmatrix} u(x,y,t) \\ v(x,y,t) \end{pmatrix}$ に対して、

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} := \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

と定め、これを $\boldsymbol{v}$ の**渦度**と呼ぶことがある。この講義でも採用する。

2 次元流についても、3 次元流とほぼ同じことが成立する。

命題 5.4 (2 次元流における渦なし流) 2 次元の速度場 $\boldsymbol{v}$ について

(1) $\boldsymbol{v}$ のポテンシャルが存在すれば渦なし ($\operatorname{rot}\boldsymbol{v}=0$)。

(2) 渦なし ($\operatorname{rot}\boldsymbol{v}=0$) ならば、任意の単連結領域で $\boldsymbol{v}$ のポテンシャルが存在する。

(3) $\boldsymbol{v}$ のポテンシャル ϕ が存在するとき、$\triangle\phi=\operatorname{div}\boldsymbol{v}$. 特に非圧縮流ならば $\triangle\phi=0$.

ただし $\operatorname{rot}\boldsymbol{v}:=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}$ とする。

証明は 3 次元の場合と同じ。

5.13.2 非圧縮流と流れ関数

2 次元流の速度場 $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ に対して、

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=-v,\quad \frac{\partial\psi}{\partial y}=u \tag{5.9}$$

を満たす ψ が存在するとき、ψ を $\boldsymbol{v}$ の**流れ関数** (stream function) と呼ぶ。

定義 5.5 (流線) 曲線が速度場 $\boldsymbol{v}$ の**流線** (stream line) とは、曲線上の各点で、曲線の接ベクトルが $\boldsymbol{v}$ と平行であることをいう。

注意 流れ関数の等高線 ($\psi=\text{const.}$ で定まる曲線) のことを流線と定義することもあるが、ここでしたように、流線は流れ関数を用いずに定義することもできる。そうしておいて、流れ関数が存在する場合は、その等高線が流線になる、と論じることを選んだ。

命題 5.6 流れ関数が存在するとき、その等高線は流線である。

証明 $\nabla\psi\cdot\boldsymbol{v}=\psi_x u+\psi_y v=-vu+uv=0$ であるから $\nabla\psi\perp\boldsymbol{v}$. $\nabla\psi$ は流れ関数 ψ の等高線の法線ベクトルであるから、それが $\boldsymbol{v}$ と直交することは、流れ関数の等高線の接線ベクトルが $\boldsymbol{v}$ と平行であることを意味する。ゆえに流れ関数の等高線は流線である。■

より具体的に、$\nabla\psi$ を $-\frac{\pi}{2}$ 回転すると $\boldsymbol{v}$ に等しい。実際

$$\begin{pmatrix}\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\\ \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\end{pmatrix}\nabla\psi=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_x\\\psi_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\psi_y\\-\psi_x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\boldsymbol{v}.$$

命題 5.7 (非圧縮流と流れ関数) 2 次元の速度場 $\boldsymbol{v}$ について

(1) $\boldsymbol{v}$ の流れ関数が存在すれば非圧縮 ($\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0$)。

(2) 非圧縮 ($\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0$) ならば、任意の単連結領域で $\boldsymbol{v}$ の流れ関数が存在する。

(3) $\boldsymbol{v}$ の流れ関数 ψ が存在するとき、$\triangle\psi=-\operatorname{rot}\boldsymbol{v}$. 特に渦なしならば $\triangle\psi=0$.

ただし $\operatorname{rot}\boldsymbol{v}:=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}$ とする。 既視感があるね。とにかく証明するけど。

証明

(1) $\operatorname{div}\boldsymbol{v}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x}=0.$

(2) $\operatorname{rot}\begin{pmatrix}-v\\ u\end{pmatrix}=\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}(-v)=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0$ であるから、任意の単連結領域で $\psi(\boldsymbol{x}):=\displaystyle\int_{C_{\boldsymbol{x}}}\begin{pmatrix}-v\\ u\end{pmatrix}\cdot d\boldsymbol{r}$ が well-defined であり、$\frac{\partial\psi}{\partial x}=-v$, $\frac{\partial\psi}{\partial y}=u$. ゆえに ψ は $\boldsymbol{v}$ の流れ関数である。

(3) $\operatorname{rot}\boldsymbol{v}=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}=-\triangle\psi.$ ■

5.13.3 流れ関数と流束

(流れ関数の意味を説明するが、最初に学ぶときは、とりあえず飛ばしても良い。)

考えている領域 Ω 内に定点 $\boldsymbol{a}$ を選び、$\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{x}\in\Omega$ に至る Ω 内の曲線 $C_{\boldsymbol{x}}$ を取る。$\psi(\boldsymbol{a})=0$ を満たす流れ関数は

$$\psi(\boldsymbol{x})=\int_{C_{\boldsymbol{x}}}\psi_x\,dx+\psi_y\,dy=\int_{C_{\boldsymbol{x}}}\begin{pmatrix}-v\\ u\end{pmatrix}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{C_{\boldsymbol{x}}}\begin{pmatrix}-v\\ u\end{pmatrix}\cdot\boldsymbol{t}\,d\sigma.$$

$\begin{pmatrix}-v\\ u\end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{t}=\begin{pmatrix}x'(s)\\ y'(s)\end{pmatrix}$ をそれぞれ $-\pi/2$ 回転する。

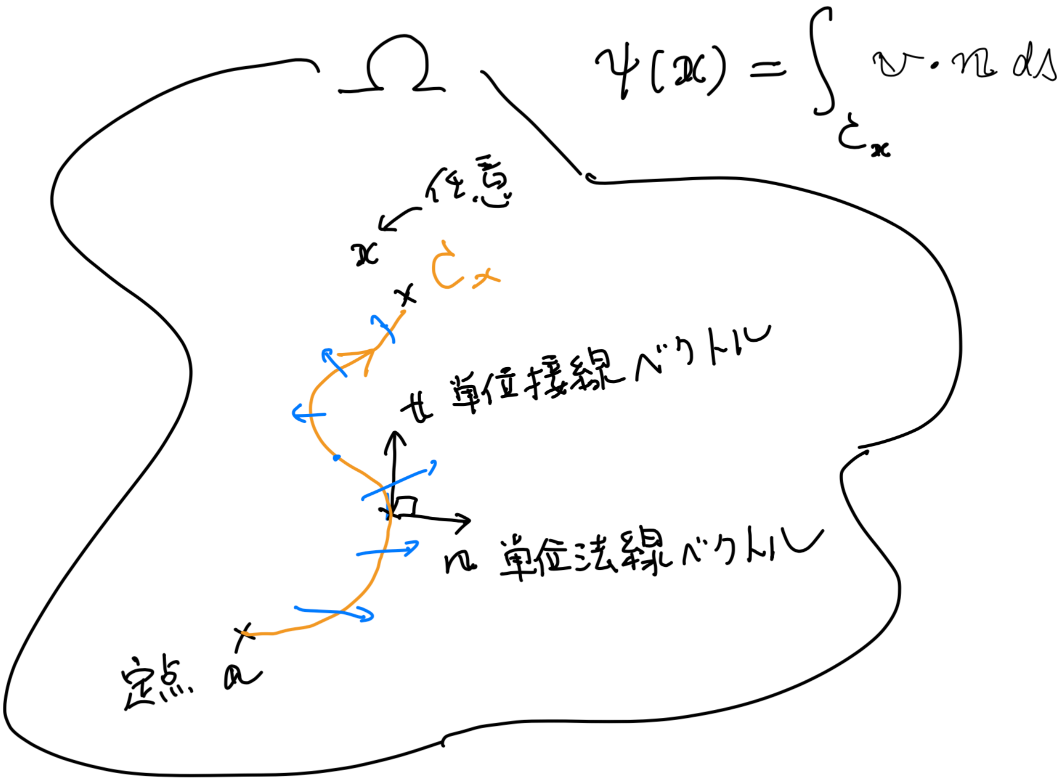
$$\boldsymbol{n}:=\begin{pmatrix}0&1\\ -1&0\end{pmatrix}\boldsymbol{t}=\begin{pmatrix}y'(s)\\ -x'(s)\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0&1\\ -1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-v\\ u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\boldsymbol{v}.$$

($\boldsymbol{n}$ は $\boldsymbol{t}$ を $-\pi/2$ 回転したもので、単位法線ベクトルである。)

$\begin{pmatrix}-v\\ u\end{pmatrix}\cdot\boldsymbol{t}=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$ であるから

$$\psi(\boldsymbol{x})=\int_{C_{\boldsymbol{x}}}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma.\blacksquare$$

この右辺は、いわゆる**流束積分** (flux integral) である。すなわち、$C_{\boldsymbol{x}}$ を横切り、$\boldsymbol{n}$ の側に単位時間に流れ出る流体の量 (2 次元なので面積) である。



5.13.4 単連結領域における 2 次元非圧縮渦なし流 — 関数論との関係

今日の議論を振り返る。5.13 で得た 2 つの定理を並べる。

命題 5.8 (渦なし流と速度ポテンシャル) 2 次元の速度場 $\boldsymbol{v}$ について

(1) $\boldsymbol{v}$ のポテンシャルが存在すれば渦なし $(\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = 0)$。

(2) 渦なし $(\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = 0)$ ならば、任意の単連結領域で $\boldsymbol{v}$ のポテンシャルが存在する。

(3) $\boldsymbol{v}$ のポテンシャル ϕ が存在するとき、$\triangle\phi = \operatorname{div}\boldsymbol{v}$. 特に非圧縮流ならば $\triangle\phi = 0$.

ただし $\operatorname{rot}\boldsymbol{v} := \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ とする。

(**細かい注の追加**　渦なしであっても、単連結でない領域においては速度ポテンシャルが存在するとは限らない。単連結でなくても、すべての循環 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_C \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{t}\,d\sigma = \int_C u\,dx + v\,dy$ が 0 であれば速度ポテンシャルが存在する。単連結ではなく、循環が 0 でない場合も、多価関数の速度ポテンシャルが存在して有効なこともある。)

命題 5.9 (非圧縮流と流れ関数) 2 次元の速度場 $\boldsymbol{v}$ について

(1) $\boldsymbol{v}$ の流れ関数が存在すれば非圧縮 $(\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0)$。

(2) 非圧縮 $(\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0)$ ならば、任意の単連結領域で $\boldsymbol{v}$ の流れ関数が存在する。

(3) $\boldsymbol{v}$ の流れ関数 ψ が存在するとき、$\triangle\psi = -\operatorname{rot}\boldsymbol{v}$. 特に渦なしならば $\triangle\psi = 0$.

ただし $\operatorname{rot}\boldsymbol{v} := \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ とする。

(**細かい注の追加**　非圧縮であっても、単連結でない場合は流れ関数が存在するとは限らない。

単連結でなくても、すべての流量周期 $\int_C \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,ds=\int_C(-v\,dx+u\,dy)$ が 0 であれば流れ関数が存在する。単連結ではなく、流量周期が 0 でない場合も、多価関数の流れ関数が存在して有効なこともある。)

渦なしと非圧縮性、両方を同時に仮定するとどうなるか。局所的には (もしも Ω が単連結ならば Ω 全体で)、ある ϕ, ψ が存在して

$$\nabla\phi=\begin{pmatrix}\phi_x\\ \phi_y\end{pmatrix}=\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}\psi_y\\ -\psi_x\end{pmatrix}$$

が成り立つ。

このとき

$$f(x+iy):=\phi(x,y)+i\psi(x,y)$$

とおき、f を $\boldsymbol{v}$ の**複素速度ポテンシャル**と呼ぶ。

実は **f は正則関数である**。実際

$$\phi_x=u=\psi_y,\quad \phi_y=v=-\psi_x$$

であるから、Cauchy-Riemann 方程式が成り立つ。

このことを知ると ϕ, ψ が調和関数であることも分かりやすい (正則関数の実部・虚部は調和関数というのは「複素関数」で学んだはず)。

また

$$f'=u-iv\quad (\text{微分すると速度が得られる}).$$

実際、$f'=\phi_x+i\psi_x=u+i(-v)=u-iv$.

複素速度ポテンシャル f が存在する場合は、流束積分は複素積分で計算できる:

$$\int_C \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,ds=\operatorname{Im}\int_C f'(z)\,dz. \tag{5.10}$$

実際、

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,ds=-v\,dx+u\,dy=\psi_x dx+\psi_y dy,$$

$$\begin{aligned}f'(z)\,dz&=(\phi_x+i\psi_x)(dx+i\,dy)\\&=(\phi_x dx-\psi_x dy)+i(\psi_x dx+\phi_x dy)\\&=(\phi_x dx+\phi_y dy)+i(\psi_x dx+\psi_y dy)\end{aligned}$$

であるから

$$\int_C \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma=\operatorname{Im}\int_C f'(z)\,dz.\blacksquare$$

(2026/6/9 の講義はここまで。)

6 問の解答

解答 1. $\phi := \phi_1 - \phi_2$ とおくと

$$\triangle\phi = 0 \quad (\text{in } \Omega), \quad \frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \quad (\text{on } \partial\Omega).$$

Green の積分公式で $u = v = \phi$ とおくと

$$\int_\Omega \triangle\phi\phi \, d\boldsymbol{x} = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\phi}{\partial n}\phi \, d\sigma - \int_\Omega \operatorname{grad}\phi \cdot \operatorname{grad}\phi \, d\boldsymbol{x}.$$

$$0 = 0 - \int_\Omega \|\operatorname{grad}\phi\|^2 \, d\boldsymbol{x}.$$

これから

$$\operatorname{grad}\phi = \mathbf{0}.$$

これから ϕ は定数である。 ■

問題へ戻る

解答 2. (準備中) 本文中に結構書いておいたので、順番入れ替えと常識くらいでできる。

問題へ戻る

解答 3. (この問題は、2026 年度のレポート課題にしたので、その締め切りが過ぎてから解答を公表する。) ■

問題へ戻る

参考文献

[1] 桂田祐史：複素関数と流体力学, https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2/intro-fluid.pdf (2015〜).