

応用複素関数 第7回

桂田 祐史

katurada@meiji.ac.jp

2026年6月2日, 2026年6月17日

$\infty, \widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, 1次分数変換の説明に3回も使ってしまったが、後悔はない(駆け足で中途半端な説明をするよりは良いだろう)。

それはそれ。今日から流体である。

目次

5	流体力学への複素関数の応用	2
5.1	はじめに	2
5.2	流体の運動の表現 何を求めれば良いか	2
5.3	流体力学の方程式 (1) 連続の方程式	3
5.4	物質微分	3
5.5	応力	4
5.5.1	Cauchy の応力原理, 応力の定義	4
5.5.2	応力テンソル	4
5.6	完全流体, 粘性流体, 非圧縮流体	6
5.6.1	静止流体, 完全流体の応力 — 圧力と応力の違いを理解する第一歩	6
5.7	流体力学の方程式 (2) 運動方程式	6
5.7.1	Newton 流体の $\operatorname{div} P$ と運動方程式	7
5.7.2	Navier-Stokes 方程式, Euler 方程式	8
5.7.3	Stokes 方程式	8
5.7.4	練習の勧め	8
5.8	流体の境界条件	9
5.8.1	粘着境界条件	9
5.8.2	滑り境界条件	9
5.8.3	その他	9
5.9	おまけ: 重力下の静水圧	10
5.9.1	深さ依存性 $p = -\rho gz + p_0$	10
5.9.2	アルキメデスの浮力の原理	10
5.10	粘性率、動粘性率の具体値	11
5.11	渦度 駆け足の説明	11
5.12	ポテンシャル流	12
5.12.1	ポテンシャル, 渦無し	12
6	問の解答	12

5 流体力学への複素関数の応用

5.1 はじめに

今回から、しばらく (3 回程度) 流体力学への応用の話をする。

今日は、流体力学で出て来る諸概念と、有名な方程式 (連続の方程式、非圧縮条件、Navier-Stokes 方程式、Euler 方程式、Stokes 方程式) の紹介をする (駆け足)。

資料の紹介をしておく。

- 「複素関数と流体力学」桂田 [1]…講義ノートのようなもの。ただし、今年度は内容 (物理的な議論) を大きくカットする予定。
- 関数論と流体力学のかかわりについての参考書としては、今井「複素解析と流体力学」[2] をあげておく。
- ベクトル解析を未修の人は適切な機会に学ぶことを勧める。とりあえず桂田 [3], [4] を紹介しておく。
- 流体力学の定番本として、今井 [5], 巽 [6] をあげておく。

流体 (fluid) とは、液体, 気体のように定まった形を持たず、「流れる」ものを理想化したものである。(Cf. 質点, 質点系, 剛体, 弾性体, …)

- 流体のかかわる現象は非常に多く、応用上重要である。
- 流体は、圧縮性と粘性の有無で分類される。
- 流体の運動の決定については、数学的には解の存在・一意性すら未解決問題である。(ほとんどが非線形問題になり取り扱いが難しい。)

次のことが言える。

2次元の非圧縮流体の渦なしの流れ = 正則関数

この意味を理解して、その場合に应用できるようになることが、応用複素関数の (1つの) 目標である。

5.2 流体の運動の表現 何を求めれば良いか

流体の状態は、ふつう次のものを求めることで定まる。ただし $\mathbf{x} = (x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$ は位置, t は時刻を表す。

- 速度 (velocity) $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$
(v の代わりに u という字を使うことも多い。)
- 圧力 (pressure) $p(\mathbf{x}, t)$

- 密度 (density) $\rho(\mathbf{x}, t)$
- 温度 (temperature) 今回は考えない。

問 1. 水と空気のおおよその密度は？ [解答へ](#)

5.3 流体力学の方程式 (1) 連続の方程式

質量が保存されることから、次式が成立する。これを**連続の方程式** (continuity equation) と呼ぶ。これは非常に一般的に成り立つ方程式である。

$$(5.1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0.$$

証明 (あらすじ) 流体内の任意の領域 V にしめる流体の質量の時間変化率を考えると、質量保存則から

$$(5.2) \quad \frac{d}{dt} \int_V \rho \, d\mathbf{x} = - \int_{\partial V} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma.$$

ただし \mathbf{n} は ∂V の点における外向き単位法線ベクトルで、 $d\sigma$ は面積要素、 ∂V は V の境界である。

(5.2) の右辺の意味や、次の Gauss の発散定理については、例えば桂田 [3] (§§3.3 の例 3.2, §§3.4), [4] を見よ。

左辺に積分記号下の微分 (微分と積分の順序交換)、右辺に Gauss の発散定理を使うと

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\mathbf{x} = - \int_V \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \, d\mathbf{x}.$$

V は任意であるから

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \blacksquare$$

5.4 物質微分

積の微分法から $\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = \operatorname{grad} \rho \cdot \mathbf{v} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v}$ が成り立つので、連続の方程式は次のように書ける。

$$(5.3) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

物質微分 (material derivative, Lagrange derivative) と呼ばれる作用素 $\frac{D}{Dt}$ を次式で定義する:

$$(5.4) \quad \frac{D}{Dt} := \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial t} + v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

これを使うと (5.3) は次のように表せる。

$$(5.5) \quad \frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

流体の流れに沿って運動するある粒子 (観測者) の位置を $\mathbf{x}(t)$ とする。すなわち

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}(t), t)$$

が成り立つ。このとき、任意の関数 $f(\mathbf{x}, t)$ に対して

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}f(\mathbf{x}(t), t) &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}(t), t)x'_j(t) + \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}(t), t) \\ &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}(t), t)v_j(\mathbf{x}(t), t) + \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}(t), t) = \frac{Df}{Dt}(\mathbf{x}(t), t) \end{aligned}$$

が成り立つ。

(2026/6/2 の講義で書き忘れたので追加) ベクトル値関数 $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}, t) \\ f_2(\mathbf{x}, t) \\ f_3(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix}$ に対しても

$$(5.6) \quad (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{f} := \begin{pmatrix} (\mathbf{v} \cdot \nabla)f_1 \\ (\mathbf{v} \cdot \nabla)f_2 \\ (\mathbf{v} \cdot \nabla)f_3 \end{pmatrix}, \quad \frac{D\mathbf{f}}{Dt} := \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \frac{Df_1}{Dt} \\ \frac{Df_2}{Dt} \\ \frac{Df_3}{Dt} \end{pmatrix}$$

と定義する。

問 2. 流体の流れに沿って運動するある粒子 (観測者) の位置を $\mathbf{x}(t)$ とすると、

$$\frac{d}{dt}f(\mathbf{x}(t), t) = \frac{Df}{Dt}(\mathbf{x}(t), t)$$

が成り立つことを示せ。 [解答へ](#)

注意 流体粒子の速度は、位置 \mathbf{x} と時刻 t が分かれば $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ で与えられるが、その加速度は $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ でなく $\frac{D\mathbf{v}}{Dt}$ である。よく考えて納得すること。

5.5 応力

5.5.1 Cauchy の応力原理, 応力の定義

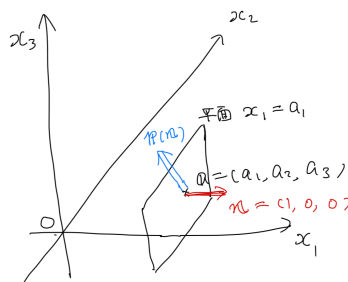
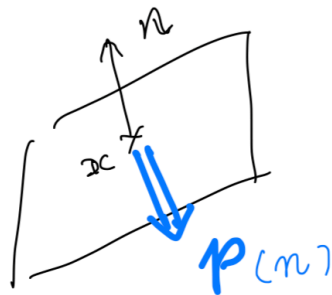
流体の運動を考えるため、Cauchy は次の仮定をおいた。

流体が接触することで及ぼす力は面積に比例する。面積あたりの力は、位置 x , 時刻 t , 面の向き (普通は外向き単位法線ベクトル \mathbf{n} で指定する) で定まる (Cauchy の応力原理)。

この面積あたりの力を **応力** (stress) と呼ぶ。

5.5.2 応力テンソル

しばらく、 $\mathbf{x} = \mathbf{a}$, $t = \tau$ と固定し、応力 \mathbf{p} を \mathbf{n} の関数と考える: $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{n})$.



点 \mathbf{a} を通る平面 $x_i = a_i$ を通して、正の側が負の側におよびす力を $\begin{pmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \\ p_{i3} \end{pmatrix}$ とおく ($i = 1, 2, 3$)。

これは $\mathbf{p}(\mathbf{e}_i)$ である。

$P := (p_{ij}) = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$ を応力テンソル (stress tensor) と呼ぶ。

次のことが成り立つ (証明は省略)。

- P は対称である: $P^\top = P$ つまり $p_{ij} = p_{ji}$.
- $\mathbf{p}(\mathbf{n}) = P\mathbf{n}$. ($P^\top\mathbf{n}$ と書くテキストもある。) 導出は例えば岡本・中村 [7] を見よ。

次式は覚えておくこと。

$$(5.7) \quad \mathbf{p}(\mathbf{n}) = P\mathbf{n}.$$

流体について適当な仮定をおくと、応力テンソルの具体形が定まる。

$$(5.8) \quad E = (e_{ij}), \quad e_{ij} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

で定めた E を、歪み (速度) テンソル (strain rate tensor) あるいは変形速度テンソルと呼ぶ。

Stokes (1819–1903) は、流体についての仮定を整理して Stokes の流体公理にまとめた (一様、等方、応力テンソルは変形速度テンソルの連続関数, $E = 0$ のとき $P = -pI$ 等々)。それから

$$(5.9) \quad P = \alpha I + \beta E + \gamma E^2$$

が導かれる (この導出については、岡本・中村 [7] を見よ。)。ここで α, β, γ はスカラー関数であり、 I は単位テンソルである。

さらに Newton 流体の仮定 (P は E の 1 次式) をおくと、

$$(5.10) \quad P = (-p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v}) I + 2\mu E$$

を得る。ここで λ, μ は非負定数、 $p = p(x, t)$ はスカラー関数である。

この辺の議論は、元々は Stokes [8] によるものであるが、[7] は Serrin [9] を元にした、とそうである。

5.6 完全流体, 粘性流体, 非圧縮流体

以下では、Newton 流体の仮定を満たす流体を考える。

μ は粘性率 (粘性係数, 粘度, viscosity) と呼ばれる非負定数である。

- $\mu = 0$ である流体を完全流体 (perfect fluid), あるいは非粘性流体 (inviscid fluid) と呼ぶ。
- $\mu > 0$ である流体を粘性流体 (viscous fluid) と呼ぶ。

一方、 $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ を満たす流体を非圧縮流体と呼ぶ。一般に連続の方程式 $\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ が成り立つので、この条件は次の方程式と同値である。

$$(5.11) \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (\text{非圧縮条件の方程式})$$

(\because 連続の方程式のうち $\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ という形のものを見れば分かる。)

非圧縮条件を満たす Newton 流体の応力テンソルは、次式を満たす ((5.10) に (5.11) を代入した)。

$$(5.12) \quad P = -pI + 2\mu E.$$

5.6.1 静止流体, 完全流体の応力 — 圧力と応力の違いを理解する第一歩

流体が静止している場合 ($\mathbf{v} = 0$) や、完全流体 ($\mu = 0$) においては ($\mu E = 0$ であるので)

$$P = -pI = - \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}.$$

ゆえに

$$\mathbf{p}(\mathbf{n}) = P\mathbf{n} = -p\mathbf{n}.$$

応力は面に垂直 ($\mathbf{p} \parallel \mathbf{n}$)、押される向きで (外向き単位法線ベクトル \mathbf{n} と逆向き)、大きさは $p = p(\mathbf{x}, t)$ で \mathbf{n} にはよらない。

学校の理科で、止まっている水の力学として聞いたことがあるかもしれない。しかし、それは特別な場合に成り立つことで、一般の場合は違う、ということに注意しよう。

5.7 流体力学の方程式 (2) 運動方程式

Cauchy の応力原理を認めると、流体の応力以外の外力が働かない場合は、一般に次の方程式が成立する。

$$(5.13) \quad \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{1}{\rho} \operatorname{div} P \quad (\text{流体の運動方程式}).$$

ただし

$$(5.14) \quad \operatorname{div} P := \begin{pmatrix} \frac{\partial p_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial p_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial p_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{33}}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (\text{行ごとに div})$$

証明 流体内の仮想的な領域 V で運動方程式を立てると

$$\int_V \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} d\mathbf{x} = \int_{\partial V} P \mathbf{n} d\sigma.$$

右辺のベクトルの第 i 成分に Gauss の発散定理を用いると

$$\int_{\partial V} (p_{i1}n_1 + p_{i2}n_2 + p_{i3}n_3) d\sigma = \int_{\partial V} \begin{pmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \\ p_{i3} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_V \operatorname{div} \begin{pmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \\ p_{i3} \end{pmatrix} d\mathbf{x} = \int_V (\operatorname{div} P)_i d\mathbf{x}.$$

ゆえに $\int_V \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} d\mathbf{x} = \int_V \operatorname{div} P d\mathbf{x}$. V は任意なので $\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \operatorname{div} P$. ■

注意 5.1 (5.13) は Cauchy が導出したということである。関数論だけでなく、こんなこともやっていたのか、と感心する。

なお、重力のような外力がある場合は、

$$\mathbf{f} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

という単位質量あたりの力を導入して

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{1}{\rho} \operatorname{div} P + \mathbf{f}$$

という運動方程式になる。■

5.7.1 Newton 流体の $\operatorname{div} P$ と運動方程式

(既に述べたように) Newton 流体の公理を満たすとき

$$P = (-p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v})I + 2\mu E$$

が成り立つ。このとき $\operatorname{div} P$ を計算すると

$$(5.15) \quad \operatorname{div} P = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}).$$

ただし

$$\Delta \mathbf{v} := \begin{pmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \\ \Delta v_3 \end{pmatrix}, \quad \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} \quad (\text{念のため}).$$

運動方程式は

$$(5.16) \quad \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v})$$

となる。

特に非圧縮流体では ($\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ であるから)

$$(5.17) \quad \operatorname{div} P = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v}.$$

5.7.2 Navier-Stokes 方程式, Euler 方程式

非圧縮流体の運動方程式は、(5.13) に (5.17) を代入して得られる:

$$(5.18) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}.$$

これが非圧縮粘性流体の方程式として有名な^{ナヴィエ・ストークス}Navier-Stokes方程式である。

ただし

$$(5.19) \quad \nu := \frac{\mu}{\rho}$$

とおいた。 ν を動粘性率 (kinematic viscosity) と呼ぶ。

特に完全流体の場合は ($\mu = 0$ であるから)

$$(5.20) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p.$$

これが非圧縮完全流体の方程式として有名な^{オイラー}Euler 方程式である。

注意 5.2 (圧縮性流体で Euler 方程式を考えることもある) この講義では、Newton 流体の応力テンソルの公式 $P = (-p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v})I + 2\mu E$ に、非圧縮性 $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ と非粘性 $\mu = 0$ を仮定して $P = -pI$ を導出して ($\operatorname{div} P = -\nabla p$ から) Euler 方程式を導いたが、テキストによっては、次のように議論するものもある。天下一りに $P = -pI + 2\mu E$ を仮定して、非粘性 $\mu = 0$ であることから $P = -pI$ と Euler 方程式を導く。あるいは「非粘性」に $\mu = 0$ だけでなく、 $\lambda = 0$ を含めている、と言えるかもしれない。その立場では、Euler 方程式は単に完全流体 (非粘性流体) の仮定から導かれた方程式であって、非圧縮性は仮定していないことになる (つまり圧縮性流体の可能性もある)。 ■

5.7.3 Stokes 方程式

流速 ($|\mathbf{v}|$) が小さいとき、Navier-Stokes 方程式 (5.18) で、 $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ を無視して ($\mathbf{v} = 0$ で線形化する、とも言える)

$$(5.21) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}.$$

を得る。これを Stokes 方程式と呼ぶ。粘性非圧縮流体の遅い流れの数学モデルとして採用される。

この他にも線形化したもの、圧縮性流体 (最近流行している) の場合など、色々あるが、運動方程式の話はこのくらいにしておく。

5.7.4 練習の勧め

今日の授業は、ほとんどが単なるお話になってしまう嫌いがあると思われる。

問 3. (5.15) を確かめよ (導関数を計算するだけだが、ベクトル解析の記号の良い練習である)。 [解答へ](#)

問 4. Navier-Stokes 方程式ベクトル表記でなく、成分表記せよ ($(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ はどういうものか、一度は計算してみよう)。 [解答へ](#)

問 5. Navier-Stokes 方程式を覚えてみよう。 [解答へ](#)

5.8 流体の境界条件

解を求めるための問題設定をするとき、初期値境界値問題とするのが普通である。境界条件について説明する。

5.8.1 粘着境界条件

粘性流体では、固体の壁においては流体は壁に張り付く、つまり

$$(5.22) \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{wall}} \quad (\text{壁の表面において})$$

を満たすことが知られている (\mathbf{v}_{wall} は壁の速度)。特に固定壁では

$$(5.23) \quad \mathbf{v} = 0 \quad (\text{壁の表面において})$$

を満たす。これを **粘着境界条件** (no-slip boundary condition) と呼ぶ。

数学的にはいわゆる Dirichlet 境界条件であり、扱いやすい。

5.8.2 滑り境界条件

一方

$$(5.24) \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{かつ} \quad \mathbf{p}(\mathbf{n}) \parallel \mathbf{n} \quad (\text{境界において})$$

を **滑り境界条件** (slip boundary condition) と呼ぶ。速度の垂直成分が 0 (壁に沿って動く) で、応力が境界に垂直 (壁に沿う成分が 0) ということである。

計算するためには方程式で表現するのが望ましい。 $\mathbf{p}(\mathbf{n}) \parallel \mathbf{n}$ は、3次元では

$$P\mathbf{n} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$$

と表せる。また 2次元流 (まだ説明していない) では、領域の境界曲線の単位接線ベクトルを \mathbf{t} として、次式で表せる。

$$P\mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = 0.$$

注意 非粘性流体では、流体のしめる領域内で $P\mathbf{n} \parallel \mathbf{n}$ が成り立つ。そのためか、 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ だけが滑り境界条件である、とみなしている人が多い。

5.8.3 その他

これ以外に、応力を指定する **応力境界条件**, **摩擦型滑り境界条件**, **摩擦型漏れ境界条件** など、色々あるが、それは必要になったときに説明する。

5.9 おまけ: 重力下の静水圧

5.9.1 深さ依存性 $p = -\rho gz + p_0$

池 (水が静止している) の水圧を、Navier-Stokes 方程式を解いて調べよう。

一様な重力場を仮定する。 $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$ という単位質量あたりの外力を含めた

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f}$$

が運動方程式になる。 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ であるから

$$\mathbf{0} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f}.$$

これは成分で書くと

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g.$$

水面を $z = 0$ として、 $z = 0$ において、 $p = p_0 = \text{大気圧}$ とすると

$$p(\mathbf{x}) = -\rho gz + p_0.$$

1 m 深く潜った (z を 1 減らした) ときの、圧力の増加分 Δp は

$$\Delta p = -\rho g(-1) = 1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \times 9.8 \text{ m/s}^2 \times 1 \text{ m} = 9.8 \times 10^3 \text{ Pa}.$$

大気圧 $p_0 = 1013 \text{ hPa} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ であるから、この Δp は大気圧 p_0 の 10% くらいである。だから 10 m 潜ったとき、 $\Delta p \doteq p_0$ となる訳である。

この問題は素朴な考え方で「解ける」ので、上の解き方は大げさのように思えるかもしれないが、我々は導出した方程式をもとに考えようとしているので、無駄なことではない。

5.9.2 アルキメデスの浮力の原理

一様な重力場の下での池あるいは湖 (水が静止している) に物体 Ω を入れたとき、物体の表面は水から応力を受ける。その“合力”を求めよう。

$\text{div } P + \rho \mathbf{f} = 0$ より

$$\text{div } P = -\rho \mathbf{f} = -\rho \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho g \end{pmatrix}.$$

ゆえに

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{p}(\mathbf{n}) d\sigma = \int_{\partial\Omega} P \mathbf{n} d\sigma = \int_{\Omega} \text{div } P d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho g \end{pmatrix} d\mathbf{x} = \rho g \int_{\Omega} d\mathbf{x} e_3 = \rho |\Omega| g e_3.$$

ただし

$$\mathbf{e}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\Omega| := \Omega \text{ の体積}.$$

$\rho|\Omega|$ は「物体が押しよける水の質量」で、 $\rho|\Omega|g$ はその重さ (重力) である。つまり向きが上向き (e_3) で、大きさが「物体が押しよける水の重さ」である力となる。これが**浮力** (buoyancy) である。

(結局、上で示したのは、物体がその表面で水から受ける応力の合計は、その物体の体積の水にかかる重力の (-1) 倍である、ということであるが、「物体の代わりに水をおけば、つりあうに決まっているのだから、それは明らかである」という人もいる。私自身は、Gauss の発散定理の応用例として、浮力の原理の証明ができるのは、とても印象的に感じた覚えがある。))

5.10 粘性率、動粘性率の具体値

粘性率、動粘性率は、粘性の大きさを表す量であるが、わかりにくい。身近な流体の場合にどのような値を取るかくらい調べておこう。

問 水や空気では、粘性率、動粘性率はどのような値を取るか。温度は 20 度とする。

答 水の場合

$$\mu = 1.005 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}, \quad \nu = 1.0 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}.$$

空気の場合

$$\mu = 1.83 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}, \quad \nu = 1.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}.\blacksquare$$

私は特に根拠なく、水の方が大きそうに思っていた。 μ については確かにそうだが、 ν については逆転している (水の密度 ρ が 3 桁近く大きいのが効いている)。

なお、サラダ油は水の 60 ~ 80 倍程度であるという。

温度が上がると μ は小さくなる。

気体の場合は、 μ は圧力にはほとんどよらない。

5.11 渦度 駆け足の説明

$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ を流体の速度場とするとき

$$\boldsymbol{\omega} := \text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

を^{うずど}**渦度** (vorticity) と呼ぶ。

物理的には流体粒子の“自転”の角速度の 2 倍と解釈できる (そうである)。

良くある誤解 : 水槽の中で水がグルグル回っていても、渦の中心以外では $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ ということがある。

$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ のとき、流れは**渦なし**、**非回転** (irrotational)、**層状** (lammelar) などという。

しかし「渦なし」という場合、もう少し強く、ポテンシャル流である (次項を見よ) という意味で使う場合があるようだ。

Lagrange の渦定理 「完全流体の、外力が保存力である流れでは、ある時刻で $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ であれば、その後も $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ である。」

5.12 ポテンシャル流

5.12.1 ポテンシャル, 渦無し

ベクトル場 \boldsymbol{v} に対して、

$$(5.25) \quad \boldsymbol{v} = \nabla\phi \quad (\boldsymbol{v} = \text{grad } \phi \text{ とも書ける})$$

を満たす ϕ が存在するとき、 ϕ を \boldsymbol{v} の **ポテンシャル** と呼ぶ。

特に \boldsymbol{v} が速度場のとき、 ϕ を \boldsymbol{v} の **速度ポテンシャル** と呼ぶ。

速度ポテンシャルが存在する流れを、**ポテンシャル流**であるという。

ポテンシャル流は渦なしである。

(\because 一般に $\text{rot grad} = \mathbf{0}$ が成り立つので、 $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \boldsymbol{v} = \text{rot grad } \phi = \mathbf{0}$.)

単連結領域における渦なしの流れはポテンシャル流である。

(\because これもベクトル解析の常識 — この PDF の末尾で少し説明)

- 一般には、渦なしであっても、ポテンシャル流であるとは限らない。
- 任意の開球は単連結領域であるから、渦なしの流れは局所的にはポテンシャルを持つことが分かる。
- 多価関数のポテンシャルを認めると、より一般の渦なしの流れのポテンシャルが存在することが分かる。

粗くまとめると

渦なしの流れ \equiv ポテンシャル流

(2026/6/2 の講義はここまで。)

6 問の解答

解答 1. 水は 1 mL で 1 g とすれば、 $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ である。

空気については、高校の化学の知識で、1 mol は 22.4 L であること、80% が窒素 (分子量 28)、20% が酸素 (分子量 32) であることを用いると、 $\rho = 1.3 \text{ kg/m}^3$ となる。 ■

[問題へ戻る](#)

解答 2. まず記号の常識の確認から。一般に $\boldsymbol{F}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix}$ に対しては

$$\boldsymbol{F}'(t) = \frac{d\boldsymbol{F}}{dt}(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \\ f_3'(t) \end{pmatrix}$$

とすることになっている。

$f(\boldsymbol{x}(t), t)$ の第 i 成分については

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f_i(\boldsymbol{x}(t), t) &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}(t), t) \frac{dx_j}{dt}(t) + \frac{\partial f_i}{\partial t}(\boldsymbol{x}(t), t) = \frac{\partial f_i}{\partial t}(\boldsymbol{x}(t), t) + \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}(t), t) \cdot \nabla f_i(\boldsymbol{x}(t), t) \\ &= \frac{Df_i}{Dt}. \end{aligned}$$

ゆえに

$$\frac{d}{dt} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} f_1(\mathbf{x}(t), t) \\ \frac{d}{dt} f_2(\mathbf{x}(t), t) \\ \frac{d}{dt} f_3(\mathbf{x}(t), t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Df_1}{Dt} \\ \frac{Df_2}{Dt} \\ \frac{Df_3}{Dt} \end{pmatrix}.$$

この右辺を $\frac{Df}{Dt}$ の定義とすべきである (断りなくそうしているテキストが多い)。■

[問題へ戻る](#)

参考文献

- [1] 桂田祐史：複素関数と流体力学, <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2/intro-fluid.pdf> (2015~).
- [2] 今井功：複素解析と流体力学, 日本評論社 (1981/10/20, 1989/4/1).
- [3] 桂田祐史：多変数の微分積分学 2 講義ノート 第 2 部, <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/tahensuu2/tahensuu2-p2.pdf> (内容はベクトル解析) (2006~).
- [4] 桂田祐史：ベクトル解析早見表, https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2-2026/vector_analysis.pdf (2021/5/31~).
- [5] 今井功：流体力学 前編, 裳華房 (1973/11/20), 流体力学の基本的文献。後編は書かれなかった。<https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000108663>.
- [6] たつみともまさ 巽 友正：流体力学, 培風館 (1982/4/15).
- [7] 岡本久, 中村周：関数解析, 岩波書店 (2006/1/26, 2016/11/10 (POD 版)), 岩波講座現代数学の基礎 (1996~1999) の分冊を単行本化したもの。
- [8] Stokes, G. G.: On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids, *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 8, pp. 287–319 (1845), *Mathematical and Physical Papers Volume 1*, Cambridge University Press (1880) の pp. 75–129 に収録されている。ジャーナル自体は PDF が公開されているようだ。
- [9] Serrin, J.: *Mathematical Principles of Classical Fluid Mechanics*, in Truesdell, C. ed., *Fluid Dynamics I / Strömungsmechanik I*, Vol. 3/8/1 of *Encyclopedia of Physics / Handbuch der Physik*, pp. 125–263, Springer, Berlin, Heidelberg (1959), ネットでコピーが入手できた。