応用複素関数 第6回

桂田 祐史

katurada@meiji.ac.jp

2026年5月26日, 2026年5月27日

前回 (2026/5/19) の $\widehat{\mathbb{C}}$ の位相の説明、間違ったことを言ったわけではないが、説明の順番などマズくて、分かりにくかったと思う。申し訳ない。

1次分数変換の話が意外と長くなってしまったので、動機の確認をしておく。1次分数変換は基本であるが、この講義的としては、特に “領域の等角写像” で使うことになる。

4 Riemann球面, 1次分数変換

(私が学生のとき、1次分数変換についてこういう定理が成り立つ、というプリントを2枚渡され、それらの証明は各自の自習、講義は先に進みます、とやられた。1次分数変換は、応用上も重要であるので、十分な時間をかけるのが望ましいが、なかなかそうはできない、ということか。)

4.9 Riemann球面は Riemann 面である

(ここは、ただのお話です。キーワード紹介程度に考えて下さい。)

曲線、曲面の概念を一般化した概念に**多様体**(たようたい) (manifold) というものがあり、現代の数学では基本的 (あちこちで使うので、習得しておくべきものである) とされている。

おおざっぱに言うと、**多様体**とは、局所的には $\mathbb{R}^n$ または $\mathbb{C}^n$ の円盤とみなせるような位相空間である。

特に、1次元の複素多様体 (局所的に $\mathbb{C}$ の円盤とみなせる位相空間) を **Riemann 面**とよぶ。

$\mathbb{C}$ 自身や、$\mathbb{C}$ の開集合は Riemann 面であるが、Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ も Riemann 面である。実際、$a \in \mathbb{C}$ の近傍 $U(a;r) = D(a;r)$ はそのまま $\mathbb{C}$ の円盤であるし、∞ の近傍 $U(\infty;R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\} \cup \{\infty\}$ は $w = \dfrac{1}{z}$ により $\mathbb{C}$ の円盤 $\{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1/R\}$ に写る。
(図を描いて説明すること。)

この座標変換 $w = 1/z$ により、$z = \infty$ においても、関数の微分可能性や留数を考えたりできる。これについて次項で解説する。

4.10　微分可能性、正則性の $\widehat{\mathbb{C}}$ への拡張

(私は初めて学んだとき、以下の定義が天下りであると思って、抵抗感があったが、多様体を知っている人には、実は自然な定義に見える。そういうのが、初学者にはわかりにくい。)

「複素関数」では、$\mathbb{C}$ の開集合 Ω で定義された $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $a \in \Omega$ に対して、

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \in \mathbb{C}$$

が存在するとき、f は a で微分可能と定義し、それを元にして正則性を定義した。

a や $f(a)$ が ∞ の場合でも良いように拡張しよう。

定義 4.1 $\widehat{\mathbb{C}}$ の開集合 Ω で定義された $f\colon \Omega \to \widehat{\mathbb{C}}$, $a \in \Omega$ に対して、f が a で微分可能とは、次の条件が成り立つことと定義する。

(i) $a \neq \infty$, $f(a) \neq \infty$ の場合: これまで通りの意味で f が a で微分可能、つまり

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

が $\mathbb{C}$ の範囲で存在する。

(ii) $a = \infty$, $f(a) \neq \infty$ の場合:

$$g(w) := \begin{cases} f\left(\dfrac{1}{w}\right) & (w \neq 0) \\ f(\infty) & (w = 0) \end{cases}$$

で定義される g が、これまで通りの意味で 0 で微分可能である。

(iii) $a \neq \infty$, $f(a) = \infty$ の場合:

$$h(z) := \begin{cases} \dfrac{1}{f(z)} & (z \neq a) \\ 0 & (z = a) \end{cases}$$

で定義される h が、これまで通りの意味で a で微分可能である。

(iv) $a = \infty$, $f(a) = \infty$ の場合:

$$F(w) := \begin{cases} \dfrac{1}{f(1/w)} & (w \neq 0) \\ 0 & (w = 0) \end{cases}$$

で定義される F が、これまで通りの意味で 0 で微分可能である。

1 次分数変換は、$\widehat{\mathbb{C}}$ 全体で微分可能 (正則) であることが分かる。

一応真面目に確認してみると

$f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ とする。分母が 0 にならないか、∞ でどうなるか、が問題となる。

$c\neq 0$ の場合、$z=-d/c$ で分母は 0 になり、$f(z)=\infty$ となる。これは (iii) のケースで、$h(z)=\dfrac{1}{f(z)}=\dfrac{cz+d}{az+d}$ の分母は、$z=-d/c$ で 0 にはならないので ($\because ad-bc\neq 0$)、微分可能である。

$c\neq 0$ の場合、$f(\infty)=\dfrac{a}{c}\neq\infty$. これは (ii) のケースで、$g(w)=f(1/w)=\dfrac{a(1/w)+b}{c(1/w)+d}=\dfrac{bw+a}{dw+c}$. この分母は $w=0$ のとき 0 にはならないので、微分可能である。

$c=0$ の場合、$f(z)=\dfrac{az+b}{d}$. この分母は 0 にはならない ($\because ad-bc\neq 0$)。$z=\infty$ で $f(z)=\infty$ となる。これは (iv) のケースで $F(w)=\dfrac{1}{f(1/w)}=\dfrac{c(1/w)+d}{a(1/w)+b}=\dfrac{dw+c}{bw+a}$. この分母は $w=0$ で 0 にはならないので ($\because ad-bc\neq 0$)、微分可能である。

4.11 1 次分数変換の鏡像の原理

1 次分数変換で、$\widehat{\mathbb{C}}$ の円は $\widehat{\mathbb{C}}$ の円に写ることを示したが、円上にない点についても、注目すべき性質 (定理 4.4) が成り立つ。定理 4.4 の重要な応用を次項で紹介する。

定義 4.2 (円に関して鏡像の位置) C は $\widehat{\mathbb{C}}$ の円であり、$z,z'\in\widehat{\mathbb{C}}$ とする。z と z' が C に関して互いに**鏡像の位置**にある (z と z' が C に関して対称である) とは，次の (a), (b) のいずれかが成り立つことをいう。

(a) C が $\mathbb{C}$ の直線であり、z と z' が C に関して対称の位置にある。

(b) C が $\mathbb{C}$ の円であり、z と z' が円 C の中心 c から発する一本の半直線上にあって、しかも $|z-c||z'-c|=r^2$ (r は円 C の半径) を満たす。円の中心 c と ∞ とはその円に関して鏡像の位置にあるとする。

もちろん図を描いて説明する。z が円周に近づくと、z' も円周に近づく。z が中心に近づくと、z' は ∞ に近づく。

条件 (b) が式で表せると便利である。

補題 4.3 z, z' が c から発する一本の半直線上にあり、かつ $|z-c||z'-c'|=r^2$ を満たすためには、 $(z-c)(\overline{z'}-\overline{c})=r^2$ を満たすことが必要十分である。

証明 各自の演習に任せる。■

定理 4.4 (1 次分数変換の鏡像の原理) C は $\widehat{\mathbb{C}}$ の円、z と z' は C に関して互いに鏡像の位置にある 2 点、f は 1 次分数変換とするとき、$f(z)$ と $f(z')$ は $f(C)$ に関して互いに鏡像の位置にある。

証明のあらすじ 色々な方法があるが、素朴な計算で証明してみよう。

f が平行移動 $T_d(z)=z+d$, 定数倍 $M_a(z)=az$ ($a\neq 0$), 反転 $R(z)=\dfrac{1}{z}$ について確かめれば十分である (任意の 1 次分数変換は、それらの合成として表せるから)。

平行移動、定数倍については直観的にも明らかであろう。

反転 $R(z)=\dfrac{1}{z}$ のときは、補題 4.3 使うと見通しが良い。

この後は興味ある人の演習とする。 ■

問 1. 円 $|z-c|^2=r^2$ の $w=R(z)=\dfrac{1}{z}$ による像を C とする。C を表す方程式を (何か 1 つ) 求めよ。$(z-c)(\overline{z'}-\overline{c})=r^2$ を満たす点 z, z' の像を w, w' とするとき、この 2 点が C について互いに鏡像の位置にあることを示せ。

4.12 1 次分数変換による領域の等角写像

領域の等角写像という概念を紹介する。有名かつ重要な話を 3 つ "先行上映" する (Riemann の写像定理の証明は長い時間がかかるので省略する。後の 2 つは証明の方針を軽く説明する。)。

(i) Riemann の写像定理

(ii) 単位円盤の等角写像

(iii) 上半平面の等角写像

(ii), (iii) が 1 次分数変換となることが、1 次分数変換の重要性を示している。(i) の証明中でも、1 次分数変換は基本的ツールとして使われる。

単位円盤を D_1 とおく: $D_1 := D(0;1)=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|<1\}$.

正則関数が正則な逆写像を持つとき、**双正則**(そうせいそく) (biholomorphic) という。

1 次分数変換は $\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への双正則写像である。

$\widehat{\mathbb{C}}$ の領域 Ω に対して、$\varphi\colon\Omega\to D_1$ が双正則であるとき、φ を **Ω の等角写像**あるいは**Ω の写像関数** (mapping function) とよぶ。

余談 4.5 (言葉遣いむつかしい) この辺の言葉遣いは、個人的にはあまり筋が通っていない感じがしている。単に等角写像というと、等角である写像という意味になるが、「Ω の」を前につけると急に違った意味になる。そもそも等角写像は conformal mapping の訳語であるが、conformal mapping を「共形写像」という訳語をあてる分野もある。 ■

円盤は単連結であるから、Ω の等角写像が存在するとき、Ω は単連結であることが必要である (双正則写像は同相写像なので、位相的な性質は保たれる)。逆「単連結ならば写像関数が存在する」は一般には成り立たないが、ほんの少しの条件を加えると成り立つ。すなわち次の定理が成り立つ。

(同じように連結性が必要なことが分かる。あれ、開集合であることはどうだろう。)

定理 4.6 (Riemann の写像定理) $\widehat{\mathbb{C}}$ の領域 Ω が単連結で、$\Omega\neq\mathbb{C}$, $\Omega\neq\widehat{\mathbb{C}}$ ならば、Ω の等角写像が存在する。

証明 省略する。■

$\Omega\neq\mathbb{C}$, $\Omega\neq\widehat{\mathbb{C}}$ の代わりに、Ω の ($\widehat{\mathbb{C}}$ における) 補集合が 2 個以上の点を含む、とすることもある (本質的には同値)。

Ω は $\mathbb{C}$ の領域, $z_0\in\Omega$ とするとき、Ω の等角写像で、次の条件を満たすものは一意的である。

$$\varphi(z_0)=0,\quad \varphi'(z_0)>0. \tag{4.1}$$

この条件を**正規化条件**とよぶ。

"簡単な" 領域の等角写像が 1 次分数変換になることが結構多い。ここでは重要なものを 2 つ紹介する。

定理 4.7 (単位円盤の等角写像) $\Omega = D_1$, $z_0 \in \Omega$ とする。双正則な $\varphi\colon \Omega \to D_1$ で、$\varphi(z_0) = 0$ を満たすものは

$$\varphi(z) := \varepsilon \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}, \quad \varepsilon \in \mathbb{C}, \quad |\varepsilon| = 1. \tag{4.2}$$

($\varepsilon = e^{i\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R}$) とも書ける。つまり回転だけの自由度しか残らない。)
$\varphi'(z_0) > 0$ という条件を課すと、$\varepsilon = 1$ と定まる。

証明　(大まかな方針を示し、証明のありかを述べる。)
条件を満たす 1 次分数変換が (4.2) であることは、

$$1 - |\varphi(z)|^2 = 1 - \left|\frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}\right|^2 = \frac{\left(1 - |z|^2\right)\left(1 - |z_0|^2\right)}{|1 - \overline{z_0} z|^2}$$

が成り立つことから分かる ($|z| < 1 \Leftrightarrow |\varphi(z)| < 1$)。詳しくは、桂田 [1] の §§6.7 を見よ。

双正則という仮定だけから、φ が 1 次分数変換に限られる、というところに **Schwarz の補題**という有名な定理 (証明は例えば桂田 [2] §§9.6 に載っている) が必要になる。それを用いた議論は、桂田 [1] の §§7.5 を見よ。■

ちゃんと証明するのは一仕事、ということでレポート課題にしたこともある。一方で、この式の形はとても覚えやすい。($\varphi(z_0) = 0$ であるから、$z - z_0$ という因数があるはず。z_0 と鏡像の位置にある $1/\overline{z_0}$ は ∞ に写るはずであるから、定数 $\times \dfrac{z - z_0}{z - 1/\overline{z_0}}$ という形をしているはず。それを 定数$' \times \dfrac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}$ と書き直すと、実は定数因子が絶対値 1 になる。)

例 4.8 (上半平面の等角写像)

$$H := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$$

を**上半平面**とよぶ。

定理 4.9 (Cayley 変換)

$$\varphi(z) := \frac{z - i}{z + i} \tag{4.3}$$

は H の等角写像である。

(0 に写る点として i を選ぶと、実軸に関する鏡像は $-i$ であるから、$\dfrac{z - i}{z + i}$ という形が頭に浮かぶ。実はそのまま修正なしで条件を満たす、ということで覚えやすい。)

略証　1 次分数変換は一般に双正則であるから、$\varphi(H) = D_1$ を確かめれば良い。それは、計算で得られる $1 - |\varphi(z)|^2 = \dfrac{4 \operatorname{Im} z}{|z + i|^2}$ から分かる。■

この φ は**Cayley**(ケーリー)**変換**とよばれる。

φ は実軸 $\mathbb{R}$ (H の境界) という直線を、単位円周 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ (D_1 の境界) に写す。実数を絶対値 1 の複素数に写す、ということである。

Hilbert 空間における自己共役作用素と unitary 変換とが、Cayley 変換で移り合うという有名な事実に対応している。

上半平面を単位円板に写す 1 次分数変換の一般形は

$$w = \alpha \frac{z-\beta}{z-\overline{\beta}}, \quad |\alpha| = 1, \quad \operatorname{Im}\beta > 0. \tag{4.4}$$

$\beta = i$, $\alpha = 1$ のとき、いわゆる Cayley 変換となる。

実直線 $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ を自分自身に写す 1 次分数変換は？

A 落穂拾い (1)

$\widehat{\mathbb{C}}$ の相異なる 3 点 α, β, γ に対して、

$$(z, \alpha, \beta, \gamma) := \frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta} \cdot \frac{z-\beta}{z-\gamma}$$

とおき、z, α, β, γ の**非調和比** (cross ratio) とよぶ。

これはつまり、α, β, γ をそれぞれ 1, 0, ∞ に写す一次分数変換による z の像である。

1 次分数変換は非調和比を変えない。すなわち、任意の一次分数変換 f に対して

$$(z, \alpha, \beta, \gamma) = (f(z), f(\alpha), f(\beta), f(\gamma))$$

が成り立つ。

証明 $f(\alpha)$, $f(\beta)$, $f(\gamma)$ を 1, 0, ∞ に写す 1 次分数変換を φ とすると、

$$\varphi(w) = (w, f(\alpha), f(\beta), f(\gamma)) \quad (w \in \widehat{\mathbb{C}}).$$

$\varphi \circ f$ は α, β, γ を 1, 0, ∞ に写す 1 次分数変換であるから、

$$\varphi(f(z)) = \varphi \circ f(z) = (z, \alpha, \beta, \gamma) \quad (z \in \widehat{\mathbb{C}}).$$

ゆえに

$$(f(z), f(\alpha), f(\beta), g(\gamma)) = (z, \alpha, \beta, \gamma) \quad (z \in \widehat{\mathbb{C}}).\blacksquare$$

参考文献

[1] 桂田祐史：続 複素関数論,「複素関数」講義ノートの続き. https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2/zoku-complex-function.pdf (2015〜).

[2] 桂田祐史：複素関数論ノート, 数学科での講義科目「関数論 2」の講義ノートあらため 現象数理学科の「複素関数」の講義ノート. https://m-katsurada.sakura.ne.jp/labo/text/complex-function.pdf (2008〜).