応用複素関数 第5回

桂田 祐史

katurada@meiji.ac.jp

2026年5月19日, 2026年5月25日

4 Riemann球面, 1次分数変換

4.5 相異なる3点を相異なる3点に写す1次分数変換

補題 4.1 (相異なる3点を 1,0,∞ に写す1次分数変換) $\alpha,\beta,\gamma\in\widehat{\mathbb{C}}$ が相異なるならば

$$\varphi(\alpha)=1,\quad \varphi(\beta)=0,\quad \varphi(\gamma)=\infty$$

を満たす1次分数変換が一意的に存在する。

証明 (存在) α, β, $\gamma\in\mathbb{C}$ (3つとも有限) の場合は

$$\varphi(z):=\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}\cdot\frac{z-\beta}{z-\gamma}. \tag{4.1}$$

これが条件を満たすことは目視で確認できる (β は 0 に行く、γ は ∞ に行く、残った α が 1 に行くようになっている)。

注 (証明の途中だけれど) (4.1) は自分で書けるようにしておくべき公式である。(もう一度繰り返し: β で 0 より $z-\beta$, γ で ∞ より $\dfrac{}{z-\gamma}$, 最後に α で 1 となるように調節する $\dfrac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}$)

$\beta=\infty$ の場合は $\varphi(z):=\dfrac{\alpha-\gamma}{z-\gamma}$, $\gamma=\infty$ の場合は $\varphi(z):=\dfrac{z-\beta}{\alpha-\beta}$, $\alpha=\infty$ の場合は $\varphi(z):=\dfrac{z-\beta}{z-\gamma}$ とすればよい (いずれもすべて有限な場合の極限移行で得られる)。

(一意性) φ_1 と φ_2 が条件を満たすならば、$\varphi:=\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}$ も1次分数変換で

$$\varphi(1)=1,\quad \varphi(0)=0,\quad \varphi(\infty)=\infty.$$

$\varphi(\infty)=\infty$ より、ある a,b が存在して $\varphi(z)=az+b$.

$\varphi(0)=0$ より、$b=0$.

$\varphi(1)=1$ より、$a=1$.

ゆえに $\varphi(z)=z=\mathrm{id}_{\widehat{\mathbb{C}}}(z)$. すなわち $\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}=\mathrm{id}_{\widehat{\mathbb{C}}}$.

φ_1 を右からかけて $\varphi_1=\varphi_2$. ■

命題 4.2 (任意の 3 点を任意の 3 点に写せる) $\alpha, \beta, \gamma \in \widehat{\mathbb{C}}$ が相異なり、$\alpha', \beta', \gamma' \in \widehat{\mathbb{C}}$ が相異なるならば、ある 1 次分数変換 φ が一意的に存在して

$$\varphi(\alpha) = \alpha', \quad \varphi(\beta) = \beta', \quad \varphi(\gamma) = \gamma'.$$

証明　一般に $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を $1,\ 0,\ \infty$ に写す 1 次分数変換を $\varphi_{\alpha,\beta,\gamma}$ と表すことにすると、

$$\varphi := \varphi_{\alpha',\beta',\gamma'}^{-1} \circ \varphi_{\alpha,\beta,\gamma}$$

とすればよい。

例題　1, 2, 3 を 2, 3, 1 に写す 1 次分数変換を求めよ。

(解答)　命題 4.2 の証明を実行する、というイメージの解答である。

$1, 2, 3$ を $1,\ 0,\ \infty$ に写す 1 次分数変換は

$$\varphi_{1,2,3}(z) = \frac{1-3}{1-2} \cdot \frac{z-2}{z-3} = \frac{2z-4}{z-3}. \quad \text{対応する行列は} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

$2, 3, 1$ を $1,\ 0,\ \infty$ に写す 1 次分数変換は

$$\varphi_{2,3,1}(z) = \frac{2-1}{2-3} \cdot \frac{z-3}{z-1} = \frac{-z+3}{z-1}. \quad \text{対応する行列は} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

求める 1 次分数変換に対応する行列は

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -13 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}.$$

ゆえに $\varphi(z) = \dfrac{5z-13}{3z-7}$. ■

4.6　Riemann 球面の幾何学的イメージ

4.6.1　立体射影

なぜ $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を Riemann 球面と呼ぶか。　$\widehat{\mathbb{C}}$ は $\mathbb{R}^3$ の球面と同一視できるから。

$$S := \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \right\}, \quad N := (0, 0, 1)$$

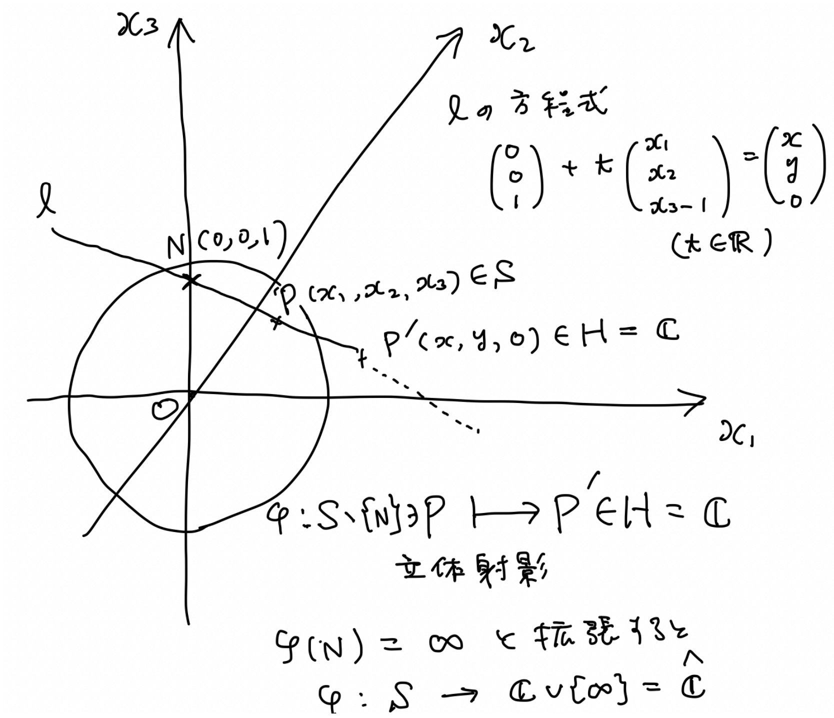
とおく。また $x_1 x_2$ 平面 $x_3 = 0$ を H で表し、複素平面 $\mathbb{C}$ と同一視する。すなわち $(x_1, x_2, 0) \in H$ に $x_1 + i x_2 \in \mathbb{C}$ を対応させる。

任意の $P \in S \setminus \{N\}$ に対して、N と P を通る直線と、平面 H との交点 P' がただ一つ定まる。P に P' を対応させる写像

$$\varphi \colon S \setminus \{N\} \ni P \longmapsto P' \in H = \mathbb{C}$$

を、N からの**立体射影** (**stereographic projection**) と呼ぶ。

注　以下で、$\varphi(N) = \infty$ と定めることで、φ を S から $\widehat{\mathbb{C}}$ への写像に拡張する。その拡張した写像も**立体射影**と呼ばれる。



4.6.2 立体射影の式

問　$\varphi(x_1, x_2, x_3) = x + iy = (x, y, 0)$ とするとき、次式を示せ。

$$x = \frac{x_1}{1 - x_3}, \quad y = \frac{x_2}{1 - x_3} \quad \text{すなわち} \quad \varphi(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}.$$

(ヒント: 2 点 N, P を通る直線と、平面 $x_3 = 0$ との交点を求める。)

問　$\forall z \in \mathbb{C}$ に対して、$z = \varphi(x_1, x_2, x_3)$ は次のように解けることを示せ。

$$x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}, \quad x_1 = \frac{z + \overline{z}}{|z|^2 + 1}, \quad x_2 = \frac{-i(z - \overline{z})}{|z|^2 + 1}.$$

(ヒント: $|z|^2 = \dfrac{1 + x_3}{1 - x_3}$ を導出した後、x_3, x_1, x_2 の順に求める。)

(逆写像が存在するので)

立体射影 $\varphi \colon S \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$ は全単射である。

4.6.3 S と $\widehat{\mathbb{C}}$ の同一視

$\displaystyle\lim_{P \to N} \varphi(P) = \infty$ である (幾何的直観でも明らか、式で示すのも簡単)。そこで北極 N に対して ∞ を対応させることで、球面 S から $\widehat{\mathbb{C}}$ への全単射な拡張が得られる。それを同じ φ で表す:

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \dfrac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} & ((x_1, x_2, x_3) \in S \setminus \{N\}) \\ \infty & ((x_1, x_2, x_3) = N = (0, 0, 1)). \end{cases}$$

元々は、S のことを Riemann 球面と呼び、φ によって $\widehat{\mathbb{C}}$ を S と同一視することで、$\widehat{\mathbb{C}}$ のことも Riemann 球面と呼ぶようになった。

問　次のことを確かめよ (幾何学的考察および計算の両方で)。

$$\varphi(\text{北半球}) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}, \quad \varphi(\text{南半球}) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\},$$
$$\varphi(\text{赤道}) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\},$$
$$\varphi(\text{北極}) = \infty, \quad \varphi(\text{南極}) = 0.$$

4.7　Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ への位相の導入

(講義してみて、説明の仕方を変えるべきと思った。新しい説明をそのうちに書くつもりだけれど、以下に書いてある実際の講義のためのメモも残す。)

点列の極限、関数の極限・連続性を定義するには、**位相**と呼ばれる構造 (開集合族) が必要になる。

$\widehat{\mathbb{C}}$ への位相の導入方法を 2 つ、駆け足 (証明は抜きで) で紹介する。どちらの方法でも同じ位相が得られる。

$\widehat{\mathbb{C}}$ への位相の導入 方法 1　一般に距離空間は位相空間となる (距離を用いて球を定義し、それから開集合を定義する)。そこで $\widehat{\mathbb{C}}$ に距離を導入してみよう。$z_1, z_2 \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して

$$d(z_1, z_2) := \left\|\varphi^{-1}(z_1) - \varphi^{-1}(z_2)\right\| \quad (\|\ \| \text{ は } \mathbb{R}^3 \text{ のノルム})$$

とおくと、d は $\widehat{\mathbb{C}}$ 上の距離となる[1] (これは簡単に確認できる)。

(要するに、z_1, z_2 に対応する S 上の 2 点の、$\mathbb{R}^3$ における距離を z_1 と z_2 の距離とする、ということ。)

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ のとき

$$d(z_1, z_2) = \frac{2\,|z_1 - z_2|}{\sqrt{\left(1 + |z_1|^2\right)\left(1 + |z_2|^2\right)}}.$$

図形イメージは鮮明だけれど、式はちょっと面倒である (個人の感想です)。

$\widehat{\mathbb{C}}$ への位相の導入 方法 2　(一見ごちゃごちゃしているけれどオススメ)

位相を定めるには、開集合を定義する以外に、各点の**基本近傍系**を定める、というやり方がある。超駆け足で説明する。

X は空でない集合とし、X の各点 x に対して、X の部分集合族 $\mathcal{B}(x)$ が定まっていて、以下の条件 (**基本近傍系の公理**) を満たすとする。

1. $(\forall x \in X)\ \mathcal{B}(x) \neq \emptyset$. さらに $(\forall x \in X)\ (\forall U \in \mathcal{B}(x))\ x \in U$.

2. $(\forall x \in X)\ (\forall U, V \in \mathcal{B}(x))\ (\exists W \in \mathcal{B}(x))\ W \subset U \cap V$.

3. $(\forall x \in X)(\forall U \in \mathcal{B}(x))\ (\exists W \in \mathcal{B}(x))\ (\forall y \in W)\ (\exists U_y \in \mathcal{B}(y))\ U_y \subset U$.

このとき、X の任意の部分集合 Ω について

$$\Omega \text{ は開集合} \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad (\forall x \in \Omega)(\exists U \in \mathcal{B}(x)) \quad U \subset \Omega$$

と定義すると、開集合の全体は**位相の公理**を満たす (位相空間のテキストを見よ[2]。例えば松坂 [1] 4 章 §3 問題 8 (略解が載っている), 河田 [2] 4 章 §11 問 11.4 (ただし解答は載っていない)。)。

[1] (i) $d(z_1, z_2) \geq 0$, $d(z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2$. (ii) $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$. (iii) $d(z_1, z_3) \leq d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3)$. 以上がつねに成り立つ、ということである。

[2] この事実は重要であると思われるが、細部まできちんと書かれた説明が意外と見つからない。

$\mathbb{C}$ においては、各 $a \in \mathbb{C}$ に対して、

$$\mathcal{B}(a) := \{U(a;r) \mid r > 0\}, \quad U(a;r) := D(a;r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < r\}$$

と定めると基本近傍系の公理が満たされ、それが定める位相は、通常の $\mathbb{C}$ の位相である。

新たに $\mathcal{B}(\infty)$ を定めて、$\mathcal{B}(a)$ $(a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\})$ が基本近傍系の公理を満たすことを確認すれば、$\widehat{\mathbb{C}}$ の位相が定義できる。

$$\mathcal{B}(\infty) := \{U(\infty;R) \mid R \in (0,+\infty)\}, \quad U(\infty;R) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\} \cup \{\infty\}$$

とすれば良い。

こうすると、複素関数に現れた

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to c} f(z) = \infty \quad &\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad (\forall U \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall z \in D(z;\delta)) \quad |f(z)| > U, \\
\lim_{z\to\infty} f(z) = A \quad &\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists R \in \mathbb{R})(\forall z \in \Omega : |z| > R) \quad |f(z) - A| < \varepsilon, \\
\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty \quad &\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad (\forall U \in \mathbb{R})(\exists R \in \mathbb{R})(\forall z \in \Omega : |z| > R) \quad |f(z)| > U
\end{aligned}$$

と整合する ($\Omega \subset \mathbb{C}$, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $c \in \Omega$, $A \in \Omega$ である)。

4.8　1 次分数変換は $\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への同相写像である

既に 1 次分数変換 φ は、$\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への全単射であり、逆写像も 1 次分数変換であること、任意の $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して $\lim_{z\to a} \varphi(z) = \varphi(a)$ が成り立つことは説明してある。

$\widehat{\mathbb{C}}$ に位相が定義できることが分かった (お話のみではあるけれど)。実は lim はその位相についての収束であることも分かる (方法 (2) で考えると簡単に分かる)。従って、φ も φ^{-1} も、$\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への連続写像である。

一般に、位相空間 X, Y の間の写像 $\varphi\colon X \to Y$ が全単射であり、φ と φ^{-1} が共に連続であるとき、φ は**同相写像** (homeomorphism) であるといい、X と Y は**同相**であるという。

これまでに分かったことは、次のように簡潔にまとめられる。

1 次分数変換は $\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への同相写像である。

2026/5/19 の講義は、このあたりまででした。

§§4.7 の説明が拙かった (多分分かりにくい) と反省しています。

参考文献

[1] 松坂和夫：集合・位相入門, 岩波書店 (1968).

[2] 河田敬義(かわだゆきよし), 三村雄征(ゆきお)：現代数学概説 II, 岩波書店 (1965), 古いテキストであるが、 位相空間論で大事なことが証明付きで程よく網羅されているので、 辞書として使うのに好適である。