応用複素関数 第4回

桂田 祐史

katurada@meiji.ac.jp

2026年5月12日, 2026年5月25日

これまでの話の流れからは、無限積 $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ を定義して、Euler による sin の無限積展開

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) \quad \text{(講義で π を書き落とす板書ミスをしたかも)}$$

を証明するのが自然であるが、それは後回しにして (一つだけ注意しておこう: $\prod_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N} a_n$ では**ない！**)、1 次分数変換の話をしよう。(早くレポート課題を出せるようにしよう、という少し不純な動機。)

複素関数論の基本的なツールである 1 次分数変換を紹介する (桂田 [1] の §4 の内容, ただしあまり対応は良くない)。そのために、それ自身重要な無限遠点 ∞, Riemann 球面も紹介する。
(実関数の世界では、1 次関数 $y = ax + b$ が基本であったが、複素関数の世界では 1 次分数関数が基本となる。我ながら少し強引だと思うけど。)

4 Riemann 球面, 1 次分数変換

(3 節とすべきかもしれないが、現時点の桂田 [1] に合わせた。)

4.0 イントロ

最初に問: ∞ は数か？ (Cf. 実数で考えるときの $+\infty$, $-\infty$)

答: ∞ は複素数ではない。「複素関数」ではモノですらなかった。

∞ をモノに格上げし、$\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ を考え、距離空間とする (収束・発散を考える)。

$\lim_{z\to a} f(z) = \infty$ ($f(z)$ が ∞ に発散する) $\Leftrightarrow$ $\widehat{\mathbb{C}}$ において $f(z)$ が ∞ に収束する、としたい。

$\widehat{\mathbb{C}}$ はもう体ではない。∞ は数ではないが、それに準ずるもの。

$\widehat{\mathbb{C}}$ を **Riemann 球面**とよぶ。

$\widehat{\mathbb{C}}$ を $\mathbb{P}^1$, $\mathbb{P}(\mathbb{C})$ とも表す (1 次元複素射影空間と呼ばれる)。**Riemann 面** (説明は略) の典型例である。

こうお膳立てすると、$f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ という関数は非常に基本的となる。これを **1 次分数変換**とよぶ。

余談 $\widehat{\mathbb{C}}$ において、$\lim$ と「合う」ように次のように定めることもある。

(1) $(\forall a \in \mathbb{C})\quad a + \infty = \infty + a = \infty.$

(2) $(\forall b \in \mathbb{C} \setminus \{0\})\quad b \cdot \infty = \infty \cdot b = \infty.$

(3) $\infty \cdot \infty = \infty.$

(4) $(\forall a \in \mathbb{C} \setminus \{0\})\quad \frac{a}{0} = \infty.$

(5) $(\forall b \in \mathbb{C})\quad \frac{b}{\infty} = 0.$

例えば、(1) は「$\lim_{z\to c} f(z) = a,\ \lim_{z\to c} g(z) = \infty \Rightarrow \lim_{z\to c}(f(z) + g(z)) = \infty$」を表していると解釈可能である。

しかし、$\infty + \infty$ や $0 \cdot \infty$, $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$ は定義しない (つじつまが合うように定義出来ない)。

$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ は体ではなく、移項や消去などは気軽に出来ない。

実数の世界の ∞ と複素数の世界の ∞ は、(ふつう) 記号で見分けがつかないが違うものである。ここでは実数世界の ∞ は $+\infty$ と書く。

$I \subset \mathbb{R}$, $f\colon I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$ とする。$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ とは

$$(\forall R \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in I : |x - a| < \delta)\ f(x) > R.$$

実数の世界には、$-\infty$ もあって、これは $+\infty$ とは違うものである。
数直線で言うと、$+\infty$ は右の果て、$-\infty$ は左の果てである。

複素数の世界には、原点から果てしなく遠い点 ∞ が 1 個あるだけ。

$$+\infty \neq -\infty = (-1) \cdot (+\infty),$$
$$(-1) \cdot \infty = \infty$$

$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を作るように、$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ を作れる (例えば杉浦 [2])。

4.1 1次分数変換の定義

4.1.1 定義する前の観察

$a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$ とするとき $\dfrac{az+b}{cz+d}$ を考える。

(i) $c \neq 0$ のとき、$\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ で連続で

$$\lim_{z\to -d/c} \frac{az+b}{cz+d} = \infty, \quad \lim_{z\to\infty} \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c}.$$

(ii) $c = 0$ のとき、$\mathbb{C}$ で連続で

$$\lim_{z\to\infty} \frac{az+b}{cz+d} = \infty.$$

(注: $ad - bc \neq 0$ より、$a \neq 0$ かつ $d \neq 0$ である。$-d/c$ と a/c が ∞ になる、と考えると分かりやすいかも。)

念のため復習　$\Omega \subset \mathbb{C}$, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $a \in \overline{\Omega}$, $A \in \mathbb{C}$ とする。

- $\displaystyle\lim_{z\to a} f(z) = \infty \Leftrightarrow (\forall R \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall z \in \Omega\colon\ |z-a| < \delta)\ |f(z)| > R.$
- $\displaystyle\lim_{z\to\infty} f(z) = A \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists R \in \mathbb{R})(\forall z \in \Omega\colon\ |z| > R)\ |f(z) - A| < \varepsilon.$

  (細かい注意: Ω 内の点列 $\{z_n\}$ で $\lim |z_n| = +\infty$ となるものが存在すると仮定しておく。)

4.1.2　定義

$a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$ とする。

(i) $c \neq 0$ のとき

$$\varphi(z) := \begin{cases} \dfrac{az+b}{cz+d} & (z \neq -d/c,\ \infty) \\ \infty & (z = -d/c) \\ \dfrac{a}{c} & (z = \infty) \end{cases}$$

(ii) $c = 0$ のとき

$$\varphi(z) := \begin{cases} \dfrac{az+b}{d} & (z \neq \infty) \\ \infty & (z = \infty) \end{cases}$$

で定められる $\varphi\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ を **1 次分数変換**と呼ぶ。

以下、単に $\varphi(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ と表す。(ふつうは、この分数式に $z = -d/c$, $z = \infty$ は代入できない訳だけど) $\varphi(-d/c) = \infty$, $\varphi(\infty) = a/c$ と約束する、ということである。

4.2　1 次分数変換の性質

次の定理を話すのを忘れて、後から戻ることになった。

命題 4.1 (実はフライング)　任意の 1 次分数変換 $\varphi\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ は連続である。

証明　我々はまだ $\widehat{\mathbb{C}}$ に距離も位相も導入していない (それで連続性を議論するのは反則！)。しかし、任意の $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して $\displaystyle\lim_{z\to z_0} \varphi(z) = \varphi(z_0)$ が成り立つように色々なことを後で定義する (約束)。その約束が果たされれば連続と分かる。■

4.2.1　行列と対応させる

複素数成分の、2 次の正則行列の全体 (一般線型群) を $GL(2;\mathbb{C})$ と表す。

$$GL(2;\mathbb{C}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle|\ a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0 \right\}.$$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2;\mathbb{C})$ に対して、1 次分数変換 φ_A を次式で定める。

$$\varphi_A(z) := \frac{az+b}{cz+d}$$

次が基本的である。

命題 4.2　(1)　$A, B \in GL(2;\mathbb{C})$ とするとき $\varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB}$.

(2)　$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して、$\varphi_I = \mathrm{id}_{\widehat{\mathbb{C}}}$ ($\widehat{\mathbb{C}}$ 上の恒等写像).

(3)　$A \in GL(2;\mathbb{C})$ ならば $\varphi_{A^{-1}} = (\varphi_A)^{-1}$.

4.2.2 証明

(1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ に対して

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pa + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{pmatrix}.$$

$z \in \mathbb{C}$, $rz + s \neq 0$, $c\varphi_B(z) + d \neq 0$ とすると

$$\begin{aligned}\varphi_A \circ \varphi_B(z) = \varphi_A(\varphi_B(z)) = \varphi_A\left(\frac{pz+q}{rz+s}\right) &= \frac{a\frac{pz+q}{rz+s} + b}{c\frac{pz+q}{rz+s} + d} \\ = \frac{a(pz+q) + b(rz+s)}{c(pz+q) + d(rz+s)} &= \frac{(ap+br)z + (aq+bs)}{(cp+dr)z + cq + ds} = \varphi_{AB}(z).\end{aligned}$$

ゆえに有限個の点を除いて、$\varphi_A \circ \varphi_B$ と φ_{AB} は一致する。

$\varphi_A \circ \varphi_B$ と φ_{AB} は $\widehat{\mathbb{C}}$ で連続であるから、$\widehat{\mathbb{C}}$ 全体で一致する。(実際、z^* を除外した点とするとき、$rz_n + s \neq 0$, $c\varphi_B(z_n) + d \neq 0$ を満たす $\{z_n\}$ で $z_n \to z^*$ となるものが取れるので、$\varphi_A \circ \varphi_B(z_n) = \varphi_{AB}(z_n)$ の極限を取って $\varphi_A \circ \varphi_B(z^*) = \varphi_{AB}(z^*)$.)

(2) $c = 0$ の場合に相当する。定義より $\varphi_I(z) = \begin{cases} z & (z \neq \infty) \\ \infty & (z = \infty) \end{cases}$. これは $\widehat{\mathbb{C}}$ の恒等写像である。

(3) $A \in GL(2; \widehat{\mathbb{C}})$ のとき、A^{-1} が存在して、$A^{-1} \in GL(2; \mathbb{C})$.

(1), (2) を用いると

$$\varphi_A \circ \varphi_{A^{-1}} = \varphi_{AA^{-1}} = \varphi_I = \mathrm{id}_{\widehat{\mathbb{C}}}.$$

同様にして $\varphi_{A^{-1}} \circ \varphi_A = \mathrm{id}_{\widehat{\mathbb{C}}}$.

ゆえに $\varphi_{A^{-1}} = (\varphi_A)^{-1}$. ■

系 4.3 任意の 1 次分数変換は全単射である。

証明　上の定理の (3) により、逆写像が存在することが分かるから。■

4.3 平行移動, 定数倍, 反転

(1) 平行移動 $b \in \mathbb{C}$ とする。

$$T_b(z) := z + b = \frac{1 \cdot z + b}{0 \cdot z + 1}, \quad 1 \cdot 1 - b \cdot 0 = 1 \neq 0.$$

(2) 定数倍 $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とする。

$$M_a(z) := az = \frac{a \cdot z + 0}{0 \cdot z + 1}, \quad a \cdot 1 - 0 \cdot 0 = a \neq 0.$$

$a = re^{i\theta}$ $(r > 0, \theta \in \mathbb{R})$ とすると、M_a は、$z \mapsto rz$ (拡大または縮小) と $z \mapsto e^{i\theta}z$ (回転) の 2 つに分解できる。

(3) 反転

$$R(z) := \frac{1}{z} = \frac{0 \cdot z + 1}{1 \cdot z + 0}.$$

以上から、平行移動、定数倍、反転が 1 次分数変換であることが分かった。

命題 4.4 任意の 1 次分数変換は、平行移動、定数倍、反転の合成として表せる。

証明

(a) $c \neq 0$ の場合、部分分数分解により

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz+d} = -\frac{ad-bc}{c^2} \cdot \frac{1}{z+d/c} + \frac{a}{c}.$$

これは $T_{d/c}$, R, $M_{-\frac{ad-bc}{c^2}}$, $T_{a/c}$ を合成したものである。

(b) $c = 0$ の場合、

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{az+b}{d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}.$$

これは $M_{a/d}$, $T_{b/d}$ を合成したものである。

4.4 $\widehat{\mathbb{C}}$ の円

4.4.1 定義と方程式

$\widehat{\mathbb{C}}$ の円とは、普通の円と直線 (∞ を通る半径無限大の円と考えるとよい、と言われている) の総称である。

$|\beta|^2 - ac > 0$ を満たす $a, c \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{C}$ を用いて

(1)
$$az\overline{z} + \beta\overline{z} + \overline{\beta}z + c = 0$$

の形に表せるもの全体である。

気になる人には自分で確かめてもらおう。

問　複素平面内の任意の直線は、ある $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\beta \in \mathbb{R}$ を用いて

$$a\overline{z} + \overline{a}z + \beta = 0$$

と表せる (直線の方程式)。

ヒント　xy 平面での直線の方程式

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0 \quad ((\alpha, \beta) \neq (0, 0))$$

に $x = (z + \bar{z})/2$, $y = (z - \bar{z})/(2i)$ を代入して整理する。

問　複素平面内の任意の円は、ある $c \in \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta < |c|^2$ を用いて、

$$z\overline{z} - c\overline{z} - \overline{c}z + \beta = 0$$

と表せる (円の方程式)。

ヒント　複素平面での円の方程式 $|z - c| = r$ は、$|z - c|^2 = r^2$, つまり $(z - c)(\bar{z} - \bar{c}) = r^2$ と同値である。

4.4.2　1 次分数変換は $\widehat{\mathbb{C}}$ の円を $\widehat{\mathbb{C}}$ の円に写す

命題 4.5 (円円対応) 任意の 1 次分数変換は、$\widehat{\mathbb{C}}$ の任意の円を $\widehat{\mathbb{C}}$ の円に写す。

証明　平行移動で、直線は直線に、円は円に写される。

定数倍で、直線は直線に、円は円に写される。

反転 $R(z)=\frac{1}{z}$ でどうなるか調べる。$\widehat{\mathbb{C}}$ の円の方程式 (1) に、$z=R^{-1}(w)=\frac{1}{w}$ を代入すると

$$a\frac{1}{w}\overline{\left(\frac{1}{w}\right)}+\beta\overline{\left(\frac{1}{w}\right)}+\overline{\beta}\left(\frac{1}{w}\right)+c=0.$$

これは次式と同値である。

$$a+\beta w+\overline{\beta}\overline{w}+cw\overline{w}=0$$

$a':=c$, $\beta':=\overline{\beta}$, $c':=a$ とおくと

$$a'w\overline{w}+\beta'\overline{w}+\overline{\beta'}w+c'=0.$$

$|\beta'|^2-a'c'=|\beta|^2-ac>0$ であるから、これは $\widehat{\mathbb{C}}$ の円を表している。■

注意 4.6 上の計算手順は広く使われている。

平面図形 C を写像 φ で写した

$$\varphi(C)\overset{\text{def.}}{=}\{\varphi(z)\mid z\in C\}$$

を考える。これは

$$\left\{w\;\middle|\;\varphi^{-1}(w)\in C\right\}$$

に等しい。C が z についての方程式で表されていれば、それに代入することで、$\varphi(C)$ の w について の方程式が得られる。■

(2026/5/12 の講義はここまで。)

参考文献

[1] 桂田祐史：続 複素関数論,「複素関数」講義ノートの続き. https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2/zoku-complex-function.pdf (2015〜).

[2] 杉浦光夫：解析入門 I, 東京大学出版会 (1980), 詳しい (しばしば辞書的といわれる)。丸善 eBook では、https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000046843 でアクセスできる. この eBook まともな目次を付けてほしい.