応用複素関数 第 13 回
〜 佐藤超函数の紹介 〜

かつらだ まさし
桂田 祐史

2024 年 7 月 16 日

目次

本日の内容・連絡事項

- いよいよ最終回。残った時間は佐藤超函数の紹介です。気楽なお話です。

5 佐藤の超函数

5.1 初めに — 超関数超入門

微分積分は便利であるが、微分が出来ない関数は多く、また極限の順序交換 (積分記号下の微分、項別微分、項別積分) も出来ない場合が少なくない。出来る場合も出来ることを示すのが面倒だったりする。そういう色々な不自由さに対処するために超関数論が生まれた。

関数論の応用というと本当に色々あって (例えば最近私は⋯)、何を話題にするか考えるけれど、今のところは最後に何か話すとしたら超函数だろう、というのが私の考えです。

以下の議論の仕方について、最初に言い訳しておく。

「複素関数」は数学的にかなり厳密な議論をしたのに比べると、「応用複素関数」は少々ゆるい議論に止めている (同じレベルで厳密な議論をするためには時間が絶対的に不足するため)。今回は輪をかけて緩い基準になっている。気楽に聴いてください。

5.2 超関数前史 — デルタ関数 (怪しい、しかし役に立つ)

5.2.1 Heaviside

電気工学者の Oliver Heaviside (英国, 1850-1925) は、定数係数の線形常微分方程式を解くために**演算子法** (operational calculus) を考えだしたが (1903 年)、数学的な正当化はしなかった [1]。

Heaviside は、次の関数を導入して利用した。

$$
Y(x) := \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x < 0). \end{cases} \tag{1}
$$

これは **Heaviside の関数**あるいは **Heaviside の階段関数**と呼ばれる。本によっては $H(x)$ という記号で表すこともある。

(Heaviside については、脱線のような気がしないでもないけれど、小松 [3], [4] (いずれもネットで読める) が面白い。Heaviside も「衝撃函数 (impulsive function)」の名前でデルタ関数を導入済みであった、とか書いてある。)

[1] 演算子法の最初の正当化は、T. Bromwich により、Laplace 変換を用いてなされた。J. Mikusinski は Laplace 変換を用いず、純粋に代数的な議論で演算子法を展開した (ミクシンスキー [1], [2])。

5.2.2 Dirac

物理学者の Dirac (Paul Adrien Maurice Dirac, 1902–1984) は、1930 年に出版した「量子力学」の中で、次のような “**デルタ関数**” を導入した。

(2) $$\delta(x) := \begin{cases} 0 & (x \neq 0) \\ \infty & (x = 0) \end{cases}$$

ただし $x = 0$ での無限大は

(3) $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1$$

を満たす程度であるとする。

— この説明は、後でも述べるように、積分論的にはめちゃくちゃである。

物理的には、単位質量を持つ質点の密度、単位点電荷の電荷密度のように解釈でき、自然なものである。

5.2.2 Dirac

この “関数” δ は、任意の連続な関数 $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\delta(x)\,dx = \varphi(0) \tag{4}$$

を満たすことが導ける。

実際、$(\varphi(x) - \varphi(0)$ は $x = 0$ で 0 であるから、$(\varphi(x) - \varphi(0))\delta(x) \equiv 0$ なので)

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\delta(x)\,dx - \varphi(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\delta(x)\,dx - \varphi(0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi(x) - \varphi(0))\,\delta(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} 0\,dx = 0
\end{aligned}$$

であるから

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\delta(x)\,dx = \varphi(0).$$

5.2.2 Dirac

実は、デルタ関数は普通の関数ではない。実際、$D\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ が Lebesgue 可測な関数で、

$$D(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

を満たすならば、D は "ほとんど到るところ 0 に等しい" (これは Lebesgue 積分論で頻出する言い回し) ので、積分論の基本的な定理によって

$$\int_{-\infty}^{\infty} D(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} 0\, dx = 0$$

が成り立ち、(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1$ と矛盾するからである。

このように、δ は "おかしな" 関数であるが、物理的には (すでに説明したように) 自然で、Dirac はこれを用いて色々なことを手際よく説明できた。

5.2.2 Dirac

Dirac は、Heaviside 関数 Y と δ の間には次の関係があると主張した。

$$Y'(x) = \delta(x). \tag{5}$$

証明もどき (Schwartz の超関数理論では、適当に修正すると証明になる)

$\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は滑らかで、遠方で 0 となる任意の関数とするとき、

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} Y'(x)\varphi(x)\,dx &= [Y(x)\varphi(x)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} Y(x)\varphi'(x)\,dx \\ &= 0 - \int_0^{\infty} \varphi'(x)\,dx = -[\varphi(x)]_{x=0}^{x=\infty} = \varphi(0) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)\,dx,\end{aligned}$$

すなわち、任意の φ について

$$\int_{-\infty}^{\infty} Y'(x)\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)\,dx$$

が成り立つ。ゆえに

$$Y'(x) = \delta(x). \quad \square$$

この議論はかなり怪しいが、この Y と δ のペアはしばしば役に立つ結果を導出できた。

L. Schwartz (Laurent Schwartz, 1915–2002) は、1940 年代後半に、**超関数** (distribution) の理論を創り、Dirac の議論の数学的正当化に成功した。

> 「工学者が長年使っていてボロのでない算法というものは必ず数学的に正当化できるはず。」 — *Schwartz* の言葉

詳しい話はここでは出来ないが、Schwartz の理論における導関数では、部分積分が鍵となる。例えば上でやった議論は、(Schwartz の理論では) $Y' = \delta$ の正しい証明である。(部分積分を使って微分の一般化をするのは、Schwartz にさきがけた Sobolev の**一般化導関数**の基本的なアイディアでもあった。)

Schwartz はこの業績によって、1950 年にフィールズ賞を受賞した。

今では Schwartz の超関数は、数学で 1 つのスタンダードになっている。

5.3.2 佐藤幹夫の hyperfunction

佐藤幹夫 (1928–2023) は、正則関数の境界値の差として超関数をとらえるアイディアに基づき、Schwartz とは別の超関数論を建設した (1958 年, [5])。Schwartz の distribution と区別するため、**hyperfunction** と名付けた。

日本語では、佐藤 (の) 超函数と呼ばれる。(Schwartz によるものは超関数と書かれることが多いが、佐藤によるものは超函数と書かれることの方が多いようである。)

5.4 佐藤超函数の定義 (のようなもの)

次のことを思い出そう: φ を複素平面の原点の近傍 U で正則な関数、C を U 内の区分的 C^1 級の曲線で、原点の周りを正の向きに一周する曲線とするとき

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\varphi(z)}{z}\,dz = \varphi(0)$$

が成り立つ (Cauchy の積分公式、あるいは留数定理による)。

C のうち上半平面にある部分, 下半平面にある部分をそれぞれ C_+, C_- とし、区間 $[a,b]$ (ただし $0 \in (a,b)$, $[a,b] \subset \Omega$) にくっつくように変形すると (図を入れないと…)

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\varphi(z)}{z}\,dz = \int_{a-i0}^{b-i0} \frac{1}{2\pi i}\frac{\varphi(z)}{z}\,dz - \int_{b+i0}^{a+i0} \frac{1}{2\pi i}\frac{\varphi(z)}{z}\,dz$$
$$= \int_a^b \frac{-1}{2\pi i}\left(\frac{1}{x+i0} - \frac{1}{x-i0}\right)\varphi(x)\,dx.$$

この右辺は何？とりあえず

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^b \frac{-1}{2\pi i}\left(\frac{1}{x+i\varepsilon} - \frac{1}{x-i\varepsilon}\right)\varphi(x)\,dx$$

くらいに解釈して下さい。

5.4 佐藤超函数の定義 (のようなもの)

そこで佐藤はデルタ関数を

$$\delta(x) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{x+i0} - \frac{1}{x-i0}\right) \tag{6}$$

と定義し、この事情を一般化して

超関数とは、上半平面と下半平面で正則な関数の境界値の差である

と定義した。

5.4 佐藤超函数の定義 (のようなもの)

定義 1.1 (のようなもの)

$\mathbb{C}$ の開集合 Ω で正則な関数全体の集合を $\mathcal{O}(\Omega)$ と表す。$F \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$ に対して

$$F(x+i0) := \lim_{\substack{z \to x \\ \mathrm{Im}\, z > 0}} F(z), \quad F(x-i0) := \lim_{\substack{z \to x \\ \mathrm{Im}\, z < 0}} F(z) \quad (x \in \mathbb{R})$$

とおき、

$$F(x+i0) - F(x-i0)$$

を F が定める**超関数**という。また F をその超関数の**定義関数**と呼ぶ。

$$\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z > 0\}, \quad \mathbb{C}_- := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z < 0\},$$

$$F_+ = F|_{\mathbb{C}_+}, \quad F_- = F|_{\mathbb{C}_-}$$

として、上半平面、下半平面で定義された正則関数の組 (F_+, F_-) が超関数を定める、と言っても同じことになる。

注意 1.2

$\mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})$ の任意の要素 F (あるいは (F_+, F_-)) は超関数を定めるが、重複がある。

$\mathbb{R}$ の近傍で正則な関数 Φ に対して

$$(F_+ + \Phi)(x+i0) - (F_- + \Phi)(x-i0)$$

は

$$F_+(x+i0) - F_-(x-i0)$$

と同じ超関数である (Φ がキャンセルすることに注意する)。

正確には、

$$F \sim G \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad F - G \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$$

で定まる同値関係 $\sim$ の同値類として超関数を定める。

5.4 佐藤超函数の定義 (のようなもの)

以下では、超関数 $f(x)$ が $F \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$ で定まることを

$$f(x) = [F(z)]$$

と表すことにする。

すでにデルタ関数について

$$\delta(x) = \left[-\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z} \right] \tag{7}$$

が分かった。Heaviside の階段函数については (以下で確認するように)

$$Y(x) = \left[-\frac{1}{2\pi i} \operatorname{Log}(-z) \right] \tag{8}$$

である (Log は対数関数の主値)。

5.4 佐藤超函数の定義 (のようなもの)

証明.

対数関数の主値について

$$\mathrm{Log}(x+i0)-\mathrm{Log}(x-i0)=\begin{cases} 0 & (x>0) \\ 2\pi i & (x<0) \end{cases}$$

であることを知っている (「複素関数」で説明済み)。そこで

$$F(z):=-\frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{Log}(-z)$$

とおくと、

$$F(x+i0)-F(x-i0)=\begin{cases} 1 & (x>0) \\ 0 & (x<0) \end{cases} = Y(x).$$

ゆえに $\left[-\frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{Log}(-z)\right]=Y(x).$ □

□

余談 1

「複素関数」で、(定積分の留数を用いた計算の際などに) しばしば $\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$ で対数関数の分枝を次のように定めて用いた。

$$\log z=\log r+i\theta\quad (z=re^{i\theta},\ r>0,\ \theta\in(0,2\pi)).$$

この $\log$ と $\mathrm{Log}(-z)$ の間には、次の関係がある [a]。

$$\mathrm{Log}(-z)=\log z-i\pi$$

Y を定義するためには、(差が等しければよいので) $-\dfrac{1}{2\pi i}\mathrm{Log}(-z)$ の代わりに $-\dfrac{1}{2\pi i}\log z$ を用いることも可能である。しかし、$\log$ の説明が面倒なためか (Log はただ単に「主値」と言えば済む)、$\mathrm{Log}(-z)$ を使うことが多いようである。

[a] 実際、$z=re^{i\theta}$ $(r>0,\ \theta\in[0,2\pi])$ のとき、$-z=re^{i(\theta-\pi)}$, $\theta-\pi\in[-\pi,\pi)$ であるから、$\mathrm{Log}(-z)=\log r+i(\theta-\pi)=\log z-i\pi$.

和とスカラー倍は簡単であるから省略する。

やや天下りに感じられるかもしれないが、超関数の導関数は次のように定義するのが良い。

定義 1.3 (超関数の導関数)

超関数 $f(x)=[F(z)]$ の導関数を

$$f'(x)=\left[F'(z)\right] \tag{9}$$

で定める。すなわち $[F(z)]'=[F'(z)]$.

したがって、任意の佐藤超函数は何回でも微分可能である。

例 1.4 (佐藤超函数論における $Y' = \delta$ の証明)

すでに

$$\delta(x) = \left[-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z}\right], \qquad Y(x) = \left[-\frac{1}{2\pi i}\operatorname{Log}(-z)\right]$$

であることを見た。

$$\left(-\frac{1}{2\pi i}\operatorname{Log}(-z)\right)' = -\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z} \tag{10}$$

であるから

$$Y'(x) = \delta(x) \quad (\text{佐藤超函数として}). \tag{11}$$

(個人的な回想: 私は、超関数として Schwartz の超関数 (distribution) を先に学んだので、$Y' = \delta$ の根拠が (10) であるという話には鮮烈な印象を持った。)

5.5.2 Fourier 変換

（ここは Fourier 変換を知っている人向け。知らない人にはごめんなさい。）

関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ に対して

$$\mathscr{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi}\, dx \quad (\xi \in \mathbb{R})$$

で定まる関数 $\mathscr{F}f$ を、f の **Fourier 変換**と呼ぶが、しばしば普通の意味では積分が収束しないことがあり、細かい技巧が必要になったりする [2]。この困難を克服するために、Fourier 解析に超関数は必要不可欠である。

[2] Lebesgue 積分で解釈する場合、$\left|f(x)e^{-ix\xi}\right| = |f(x)|$ であるので、$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty$ が積分が存在するための必要十分条件である。（しかし、例えば Fourier 解析で重要な $\operatorname{sinc} x = \dfrac{\sin x}{x}$ はこの条件を満たさない。）

5.5.2 Fourier 変換

定義 1.5 (佐藤超函数における Fourier 変換)

関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ に対して、f の Fourier 変換 $\mathscr{F}f = \hat{f}$ を次式で定める:

(12a)
$$\mathscr{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) := F_+(\xi + i0) - F_-(\xi - 0)$$

ただし

(12b)
$$F_+(\zeta) := \int_{-\infty}^{0} e^{-ix\zeta} f(x)\, dx \quad (\operatorname{Im}\zeta > 0)$$

(12c)
$$-F_-(\zeta) := \int_{0}^{\infty} e^{-ix\zeta} f(x)\, dx \quad (\operatorname{Im}\zeta < 0).$$

F_+ と F_- の定義式の積分において、どちらも

$$\left|e^{-ix\zeta} f(x)\right| = e^{\operatorname{Re}(-ix\zeta)}\,|f(x)| = e^{x \operatorname{Im}\zeta}|f(x)|, \quad x \operatorname{Im}\zeta < 0 \quad (x \neq 0)$$

を満たすので、f に関する緩い条件のもとで、(12b), (12c) の積分が収束することに注意しよう。収束に関する心配はほぼ無用、ということになる。

例 1.6 (1 の Fourier 変換)

定数関数 $f(x)=1$ の Fourier 変換を求めよう。

$$F_+(\zeta)=\int_{-\infty}^{0} e^{-ix\zeta}\,dx=\left[\frac{e^{-ix\zeta}}{-i\zeta}\right]_{x=-\infty}^{x=0}=-\frac{1}{i\zeta},$$
$$F_-(\zeta)=-\int_{0}^{\infty} e^{-ix\zeta}\,dx=-\left[\frac{e^{-ix\zeta}}{-i\zeta}\right]_{x=0}^{x=\infty}=-\frac{1}{i\zeta}$$

であるから

$$\mathscr{F}f(\xi)=\frac{-1}{i}\left(\frac{1}{\xi+i0}-\frac{1}{\xi-i0}\right)=2\pi\delta(\xi).$$

こうして “有名な” 次式が得られる [a]。

$$\mathscr{F}1=2\pi\delta. \tag{13}$$

---

[a] $\mathscr{F}f(\xi)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}d\xi$ と定義する場合は ($\sqrt{2\pi}$ で割ってある)、$\mathscr{F}1(\xi)=\sqrt{2\pi}\delta(\xi)$ である。

5.5.3 積分

定義 1.7 (超関数の積分)

$f(x) = F_+(x+i0) - F_-(x-i0)$ を、実軸上の有界閉区間 $[a,b]$ の近傍で定義された超関数で、端点 a, b の近傍で実解析的なものであるとする。C を複素平面内の区分的 C^1 級の閉曲線で、$[a,b]$ を正の向きに 1 周するものとして

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{C+} F_+(z)\,dz - \int_{C-} F_-(z)\,dz. \tag{14}$$

$f(x) = [F(z)]$ のとき $\displaystyle\int_a^b f(x)dx := \int_C F(z)\,dz$、とも書ける。

最近、定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ の近似値を求めるために、$\displaystyle\int_C F(z)\,dz$ を台形則で数値計算するというアルゴリズムが提唱された (解析的周期関数の一周期積分に対する台形則…なるほど高精度に計算できるはず！！)。数値計算のような実用的な問題にも役に立つことがある、となる。

5.5.3 積分

コンパクトな台を持つ超関数 f に対して

$$G(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-z}\,dx \quad (z \in \mathbb{C}\setminus \operatorname{supp} f)$$

で定めた G は $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ で正則で、

$$f(x) = [G(z)]$$

が成り立つことが証明できる。ゆえに G は f の定義関数である。これを f の**標準定義関数**と呼ばれる。

f が普通の可積分関数であるときも、G は正則関数となるが、G の定める超関数を、f を超関数とみなしたものとみなす。

例 1.8

$[a,b]$ の定義函数 $\chi_{[a,b]}$ を超関数とみなしたときの標準定義関数は

$$\frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{dx}{x-z} = \frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{Log}\,\frac{z-b}{z-a}.$$

(この右辺の関数は頻出するが、そういう意味がつけられるとは$\cdots$)

この導関数は $\dfrac{1}{2\pi i}\left(\dfrac{1}{z-b}-\dfrac{1}{z-a}\right)$ であるから、

$$\chi'_{[a,b]}(x) = \delta(x-a) - \delta(x-b).$$

この結果は納得しやすい ($x = a, b$ を除くと $\chi_{[a,b]}(x) = Y(x-a) - Y(x-b)$ であり、この両辺を微分した形をしている)。 □

5.6 参考書案内

原論文である佐藤 [5] を入手して、眺めてみることは、オススメである (オリジナル、日本語、ネットで入手可能、関数論以外の予備知識がなくても読めるところ多い、と良いことづくめ)。日本語で読める重要な数学論文の筆頭に上げたい論文である。

残念ながら、佐藤超函数について解説した和書は、新刊では入手できないものが多い。

現在、(比較的) 入手しやすいテキストは、森本 [6], 金子 [7] である。実は [7] の第 1 章が今回の話の種本である。

今井 [8] は、超関数に流体力学的イメージ (渦層) がつけられるという話で、筆者は最初に読んだとき鮮烈な印象を持った。まるまる 2 巻、1 変数超関数の話で、具体的な計算例を色々知りたい場合に一推しである (計算例の多くは Schwartz 超関数としても導出できるが、佐藤超函数でやった方が簡単、ということが多い)。

1 変数の部分をやさしく読み解き、Schwartz の distribution との関係も解説した山中 [9] は、便利である (これも今となっては入手しにくいのが難点である)。

参考文献表 I

[1] ミクシンスキー, Mikusiński, J.：演算子法 上, 裳華房 (1965), 松村 英之・松浦 重武 訳.

[2] ミクシンスキー, Mikusiński, J.：演算子法 下, 裳華房 (1967), 松浦 重武・笠原 晧司 訳.

[3] 小松彦三郎：Laplace 超函数による微分方程式の解法, 京都大学数理解析研究所講究録, Vol. 935, pp. 21–52 (1996), https://repository.kulib.kyoto-u.ac.jp/dspace/bitstream/2433/60022/1/0935-3.pdf で入手可能。

[4] 小松彦三郎：Heaviside の数学, 2003 年度日本数学会年会 企画特別講演アブストラクト集, pp. 55–65 (2003), https://www.jstage.jst.go.jp/article/emath1996/2003/Spring-Meeting/2003_Spring-Meeting_55/_pdf/-char/ja で入手可能。

[5] 佐藤幹夫：超函数の理論, 数学, Vol. 10, No. 1, pp. 1–27 (1958 年 10 月), https://www.jstage.jst.go.jp/article/sugaku1947/10/1/10_1_1/_pdf から入手可能である。タイトルで検索すれば見つけられる。

[6] 森本光夫：佐藤超函数入門, 共立出版 (1976, 2000/9/1 復刊), 現在品切れ.

参考文献表 II

[7] 金子晃：新版 超函数入門, 東京大学出版会 (1996), もともと二分冊で出版されたものの復刊。その後オンデマンド版も出たが、 それも新刊では入手不可能になっている？

[8] 今井功：応用超関数論 I, II, サイエンス社 (1981), 版元在庫切れで中古市場でプレミア価格がついている.

[9] 山中健：線形位相空間と一般関数, 共立出版 (1966), 在庫切れと思ったていたら、ペーパーバック予約受付中になっている？？？