

# 応用複素関数 第 11 回

## ～ ポテンシャル問題 (2) ～

かつらだ まさし  
桂田 祐史

2024 年 7 月 2 日

# 目次

- 1 本日の内容・連絡事項
- 2 ポテンシャル問題 (続き)
  - Jordan 領域の写像関数 (続き)
    - Carathéodory の定理
  - Dirichlet の原理
    - 証明
    - 反省と歴史
  - ポテンシャル問題の数値解法 (1) 有限要素法
- 3 FreeFem++ を体験しよう
  - どういうものか
  - 入手とインストール
  - サンプル・プログラム
- 4 ポテンシャル問題 (続き)
  - 弱解の方法
    - はじめに
    - Poisson 方程式の境界値問題 (P)
    - 弱定式化 (W) と変分問題 (V)
    - 3 つの問題 (P), (W), (V) の同等性
    - (P) の解は (W) の解 — 弱形式の導出
    - (W) と (V) は同値

今後の見通しのようなもの。

- ① ポテンシャル問題の2つの解法 (有限要素法と基本解の方法) を紹介する (その途中)。レポート課題3は、ポテンシャル問題をどちらかの方法で解く、というものになる。
- ② 有限要素法については、前回 FreeFem++ というソフトを紹介した。本日はそれを理解するため、Dirichlet の原理、弱解の方法の解説をする。弱解の方法については手短にすますが、実は、この方向性で、ポテンシャル問題 (Laplace 方程式の境界値問題) の解の存在と一意性が証明できる。
- ③ 数値計算の実用性の観点からは、有限要素法よりは基本解の方法が優れている。これを用いて領域の写像関数 (Riemann mapping) を求めてみる。

## 定理 11.1 (Carathéodory の定理)

$C$  を  $\mathbb{C}$  内の Jordan 曲線、 $\Omega$  を  $C$  の囲む Jordan 領域、 $\varphi: \Omega \rightarrow D(0; 1)$  を双正則とすると、 $\varphi$  は同相写像  $\tilde{\varphi}: \bar{\Omega} \rightarrow \bar{D}(0; 1)$  に拡張できる。

有名な定理であるが、証明が載っているテキストが意外と少ない (手持ちのテキストで載っているものを探したのだけれど…有名な Ahlfors [1] も give up している, 1つの理由は Jordan 曲線定理を避ける風潮のせいかも)。私自身はチェックしていないが、Wikipedia [▶ Link](#) に証明の情報があ

## 4.5 Dirichlet の原理

Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題

$$(1a) \quad \Delta u = 0 \quad (\text{in } \Omega),$$

$$(1b) \quad u = g \quad (\text{on } \partial\Omega)$$

の解  $u$  の存在を示すため、Riemann は次のように考えた。

境界条件 (1b) を満たす関数の全体  $X$  と、 $X$  上の汎関数  $J$  を考える。

$$X := \{u \mid u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}, (\forall x \in \partial\Omega) u(x) = g(x)\},$$

$$J[u] := \iint_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2) dx dy \quad (u \in X).$$

### Dirichlet の原理

$J$  の最小値を与える  $u$  は  $\Delta u = 0$  (in  $\Omega$ ) を満たす。

したがって  $J$  の最小値を与える  $u$  は (1a), (1b) の解である。

Riemann (1826–1866) は、Dirichlet (1805–1859) 先生の講義の中で Dirichlet の原理を聴いたそうである。

## 4.5 Dirichlet の原理 4.5.1 証明

### 証明

$v: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  は、条件  $v = 0$  (on  $\partial\Omega$ ) を満たす任意の関数とする。任意の  $t \in \mathbb{R}$  に対して  $u + tv = g + t \cdot 0 = g$  (on  $\partial\Omega$ )。ゆえに  $u + tv \in X$  である。仮定より

$$f(t) := J[u + tv] \quad (t \in \mathbb{R})$$

は  $t = 0$  で最小値をとる。ところが

$$f(t) = J[u] + 2t \iint_{\Omega} (u_x v_x + u_y v_y) dx dy + t^2 \iint_{\Omega} (v_x^2 + v_y^2) dx dy$$

は  $t$  の 2 次関数であり、 $t = 0$  で最小となるので、1 次の係数は 0 である:

$$(2) \quad \iint_{\Omega} (u_x v_x + u_y v_y) dx dy = 0 \quad (\text{注目すべし — 後述の弱形式}).$$

**Green の公式**  $(\iint_{\Omega} \Delta u v dx dy = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma - \iint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx dy)$  より

$$\iint_{\Omega} \Delta u v dx dy = 0.$$

これが任意の  $v$  について成り立つことから (**変分法の基本補題により**)

$$\Delta u = 0 \quad (\text{in } \Omega). \quad \square$$

## 4.5 Dirichlet の原理

### 4.5.2 反省と歴史

Riemann は、汎関数  $J[u]$  を最小にする  $u \in X$  の存在は明らかだと考えた。

$J$  は下に有界 ( $J[u] \geq 0$ ) であるから、 $J$  は下限を持つ。それは最小値のはず…

それに Weierstrass が疑義を呈した (「下限は本当に最小値？」とツツコミを入れた)。これに Riemann は存命中に答えられなかった。

現代的な解説をすると、関数空間は無限次元空間なので、有界閉集合上の連続関数であっても、最小値を持たないことがある。

ポテンシャル問題は重要なため、解の存在について、多くの人が努力して Dirichlet 原理を用いない証明がいくつか発見されたが、Riemann の発表から約 50 年後 (1900 年頃)、D. Hilbert が Dirichlet 原理に基づく証明を発表し、肯定的に解決した。

今では解の存在証明は、このルートをたどるのがスタンダードになっている。…でも応用複素関数としては、ここから数値計算法に舵を切る (存在証明については、関数解析か偏微分方程式論で学んでください)。

以上の話は、少し込み入っていて、初めて聴く人には分かりにくいと思われるので、振り返っておこう。

- Riemann の写像定理という関数論で基本的と考えられている定理がある。それは領域の写像関数の存在に関する定理である。
- Jordan 曲線 (単純閉曲線) で囲まれた領域<sup>1</sup> の写像関数は、Laplace 方程式のある Dirichlet 境界値問題を解くことで求まる。
- Riemann は、その境界値問題が次のように解けると主張した:  
汎関数  $J[u] := \iint_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2) dx dy$  の最小化問題 (変分問題) が解ければ良い (∵ Dirichlet の原理)。この  $J$  の最小値の存在は明らか。  
→ ツッコミが入って、頓挫したが、結局は解決された。

最小性は

$$\iint_{\Omega} (u_x v_x + u_y v_y) dx dy = 0 \quad (v \text{ は条件 } v = 0 \text{ on } \partial\Omega \text{ を満たす任意の関数})$$

という条件と同値である。この式は弱形式と呼ばれる。有限要素法という数値解法では、微分方程式の近似解を弱形式の解として求める。

---

<sup>1</sup>穴が空いていないということで、最も単純と考えられる。

## 4.6 ポテンシャル問題の数値解法 (1) 有限要素法

ポテンシャル問題を数値的に解くことを考えよう。この「応用複素関数」では、**有限要素法**と**基本解の方法**を簡単に紹介する。

差分法で解くこともできるが、長方形領域でない問題を解くには工夫が必要になり、あまり便利でない。

**有限要素法の主たるアイデア**は次の2つ:

- ① **弱形式**を用いる。
- ② 領域を三角形、四面体などの**有限要素**に分割し、近似解や試験関数に**区分的多項式**を採用する。

この講義では有限要素法の詳細は解説できないが、幸い **FreeFem++** というソフトを用いると、弱形式さえ分かれば、有限要素についてはソフトに任せにして、数値計算ができる。

実は Dirichlet 原理の証明中に現れた (7) は Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題の弱形式である。(弱形式については後述する。)

今回は「百聞は一見にしかず」で、まずはプログラム(スライド1枚)を紹介する。

**2,3行書き換えるだけで「自分の問題」が解ける。**

```

// potential2d-v0.edp --- 2次元非圧縮ポテンシャル流
// 速度ポテンシャル, 速度を求め、等ポテンシャル線, 速度場を描く
border Gamma(t=0,2*pi) { x = cos(t); y = sin(t); } // 円盤領域
int m=40;
mesh Th=buildmesh(Gamma(m));
plot(Th, wait=1, ps="Th.eps");
// 次の2行は区分1次多項式を使うという意味
fespace Vh(Th,P1);
Vh phi, v, v1, v2;
// 境界条件の設定
func Vn=x+2*y; //  $\Omega$ が単位円で,  $V=(1,2)$  のとき  $V \cdot n=x+2y$ 
func Vn2=((x>0&&y>0) || (x<0&&y<0))*(x+2*y); // 右上と左下のみ

// 速度ポテンシャル $\phi$ を求め、その等高線(等ポテンシャル線)を描く
solve Laplace(phi,v) =
    int2d(Th)(dx(phi)*dx(v)+dy(phi)*dy(v)) -int1d(Th,Gamma)(Vn*v);
plot(phi,ps="contourpotential.eps",wait=1);
// ベクトル場  $(v1,v2)=\nabla\phi$  を描く(ちょっと雑なやり方)
v1=dx(phi); v2=dy(phi);
plot([v1,v2],ps="vectorfield.eps",wait=1);

// 等ポテンシャル線とベクトル場を同時に描く
plot([v1,v2],phi,ps="both.eps", wait=1);

```

**FreeFem++** は、2次元, 3次元の偏微分方程式の問題を有限要素法で解くための、一種の PSE (problem solving environment) である。

パリ第6大学 J. L. Lions 研究所の Frédéric Hecht, Oliver Pironneau, A. Le Hyaric, 広島国際学院大学の 大塚厚二氏らが開発した。

ソースコードとマニュアル (700 ページ超、幸い英文)、主なプラットフォーム (Windows, Mac, Linux) 向けの実行形式パッケージがフリーで提供されている。

従来のプログラミング言語では、短くても数百行のプログラムを書く必要があったような問題が、十数行のプログラム (スライド1枚に入ったりする) を書くだけで解けてしまったりする。非常に便利。

## ① FreeFem++ の WWW サイト

分厚い事例集 (マニュアル?) Hecht [2] がある。

パラパラしてみると、どういうことが出来るか分かる。

② 大塚・高石 [3] という日本語の解説書がある (現在品切だが、明治大学の学生は、図書館あるいは Maruzen eBook で読める)。

③ 色々な WWW サイトがある (その多くは信頼できる)。  
まず自作を紹介しておく

- 「FreeFem++の紹介」
- 「FreeFem++ ノート」

日本応用数理学会のチュートリアルの資料&サンプル・プログラム

- 「ソフトウェアセミナー：FreeFem++による有限要素プログラミング - 中級編 -」 (2016/2/11,12)
- 「ソフトウェアセミナー：FreeFem++による有限要素プログラミング - 上級編 -」 (2016/6/4,5)

(追加) 最近やった某授業の資料「FreeFem++の文法」

# FreeFem++ を体験しよう 入手とインストール

このスライドの内容は、前回 (2024/6/25) 解説済み。

現在、インストールが少し難しい。

2024/7/2 時点で、version 4.14 が最新版である。古い macOS を使っているのではない限りこれをインストールすると良い。

インストール手順は、「Mac での FreeFem++ のインストール作業メモ」で説明してある (先週の授業中に実演した)。

- Ventura (macOS 13) 以降の macOS を使っている人は、書かれている手順を良く読んで慎重に作業して下さい。
- Ventura より前、Mojave 以降の macOS を使っている人は比較的簡単にインストールできるはず。
- macOS が 10.11(El Capitan)～10.13(HighSierra) ならば、FreeFem++ version 4.9 (FreeFem++-4.9-full-MacOS\_10.11.pkg) を試してみる。

いずれにせよ、トラブルが生じたら気軽に相談して下さい。

文法は C 言語に似ているので、見様見真似でプログラムが書けると思われるが、簡単な説明を用意した。

## FreeFem++ を体験しよう サンプル・プログラム

FreeFem++ がインストールできたら、ターミナルを新しく開いて、以下の4つのコマンドを順番に実行して下さい。

```
curl -O https://m-katsurada.sakura.ne.jp/program/freefem/poisson.edp
FreeFem++ poisson.edp
```

```
curl -O https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2/potential2d-v0.edp
FreeFem++ potential2d-v0.edp
```

potential2d-v2.edp というものもある。

FreeFem++ では、plot() 実行後に一時停止することがあります(グラフィックスを見てもらうため)。次のプロットへ進むには [Enter]、グラフィックスを閉じるには [esc] を入力します。

FreeFem++ のインストールや、サンプル・プログラムの実行については、気軽に質問して下さい。

## 4.7 弱解の方法 4.7.1 はじめに

今回用いる有限要素法は、今では微分方程式論で常識となっている**弱解の方法** (weak formulation) を応用したものである。

これは、Riemann による、Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題を解くために用いた論法を発展させたものである。現在では様々な微分方程式に応用されているが、ここではもっとも基本的な Poisson 方程式の境界値問題について説明する (おおむね菊地 [4] に沿った解説)。

厳密に議論するには、**広義導関数**、いわゆる **Sobolev 空間**<sup>ソボレフ</sup> を導入する必要がある。具体的には、後で出て来る  $X_{g_1}$  と  $X$  は、本当は Sobolev 空間の一種  $H^1(\Omega)$  を用いて

$$X_{g_1} := \{w \in H^1(\Omega) \mid w = g_1 \text{ on } \Gamma_1\}, \quad X := \{w \in H^1(\Omega) \mid w = 0 \text{ on } \Gamma_1\}$$

と定義すべきものである。ともあれ、ここでは関数の滑らかさに関する議論には目をつぶって議論する。

(Sobolev 空間を学ぶときは、Brezis [5], [6] をチェックしてみよう。)

## 4.7.2 Poisson 方程式の境界値問題 (P)

Laplace 方程式を一般化した Poisson 方程式の境界値問題を考える。

$\Omega$  は  $\mathbb{R}^m$  ( $m = 2, 3$ ) の有界領域、 $\Gamma := \partial\Omega$  は  $\Omega$  の境界、 $\Gamma_1$  と  $\Gamma_2$  は

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma, \quad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$$

を満たす。また、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g_1: \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g_2: \Gamma_2 \rightarrow \mathbb{R}$  が与えられているとする。 $\Gamma_1 = \emptyset$  (全周 Neumann) のときは  $\int_{\Gamma_2} g_2 d\sigma = 0$  を仮定する。

問題 (P)

Find  $u$  s.t.

$$(3) \quad -\Delta u = f \quad (\text{in } \Omega),$$

$$(4) \quad u = g_1 \quad (\text{on } \Gamma_1),$$

$$(5) \quad \frac{\partial u}{\partial n} = g_2 \quad (\text{on } \Gamma_2).$$

## 4.7.3 弱定式化 (W) と変分問題 (V)

$$X_{g_1} := \{w \mid w: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}, w = g_1 \text{ on } \Gamma_1\}, \quad X := \{w \mid w: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}, w = 0 \text{ on } \Gamma_1\},$$

$$(6) \quad J[w] := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx - \int_{\Omega} f w dx - \int_{\Gamma_2} g_2 w d\sigma \quad (w \in X_{g_1}).$$

とおく。 $X$  の要素はしばしば**試験関数** (test function) と呼ばれる。

次の2つの問題を考える。

(W)

Find  $u \in X_{g_1}$  s.t.

$$(7) \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_2} g_2 v d\sigma \quad (v \in X).$$

(条件 (7) を**弱形式** (weak form) と呼ぶ。)

(V)

Find  $u \in X_{g_1}$  s.t.

$$(8) \quad J[u] = \inf_{w \in X_{g_1}} J[w]. \quad (\text{inf は結局は min})$$

## 4.7.4 3つの問題 (P), (W), (V) の同等性

(P), (W), (V) は、ほぼ同値な問題である。実際、次が成り立つ。

### 定理 11.2

- ①  $u$  が (P) の解  $\Rightarrow u$  が (W) の解
- ②  $u$  が (W) の解  $\Leftrightarrow u$  が (V) の解
- ③  $u$  が (W) の解かつ  $u$  が  $C^2$  級  $\Rightarrow u$  が (P) の解

(2024年度の授業では (1) 以外の証明を省略する。一気に 4.8 まで飛ぶ。

## 4.7.5 (P) の解は (W) の解 — 弱形式の導出

### (1) の証明

$u$  が (P) の解と仮定する。(3)  $-\Delta u = f$  に任意の  $v \in X$  をかけて  $\Omega$  上で積分すると

$$(9) \quad - \int_{\Omega} \Delta u v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx.$$

左辺を Green の公式 ([7]) を用いて変形してから、 $v = 0$  (on  $\Gamma_1$ ) と (5)  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g_2$  を用いると

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \Delta u v \, dx &= - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v \, d\sigma + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \\ &= - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v \, d\sigma - \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v \, d\sigma + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \\ &= - \int_{\Gamma_2} g_2 v \, d\sigma + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx. \end{aligned}$$

(9) に代入して移項すると

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma_2} g_2 v \, d\sigma.$$

すなわち、 $u$  は弱形式を満たす ((W) の解である)。

□

## 4.7.6 (W) と (V) は同値 準備

(2) の証明のために補題を準備する。

### 補題 11.3

任意の  $w \in X_{g_1}$ ,  $v \in X$ ,  $t \in \mathbb{R}$  に対して次式が成立する。

$$(10) \quad J[w + tv] = \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \\ + t \left( \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v dx - \int_{\Omega} f v dx - \int_{\Gamma_2} g_2 v d\sigma \right) + J[w].$$

証明は単なる計算であるので省略する。

## 4.7.6 (W) と (V) は同値

### (2) の証明

[ $u$  が (V) の解  $\Rightarrow u$  は (W) の解] (デジャブ? Dirichlet 原理の証明と似ている)

$u$  は (V) の解とする。任意の  $v \in X$  に対して、 $f(t) := J[u + tv]$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) とおくと、

$$f(t) = J[u + tv] \geq J[u] = f(0).$$

ゆえに  $f$  は  $t = 0$  で最小になる。ゆえに  $J[u + tv]$  の  $t$  の 1 次項の係数は 0 である:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\Omega} f v \, dx - \int_{\Gamma_2} g_2 v \, d\sigma = 0.$$

ゆえに  $u$  は (W) の解である。 [ $u$  が (W) の解  $\Rightarrow u$  は (V) の解]

$u$  は (W) の解とする。任意の  $w \in X_{g_1}$  に対して、 $v := u - w$  とおくと  $v \in X$  である。

$$J[w] - J[u] = J[u + 1 \cdot v] - J[u] \quad (t = 1 \text{ として補題 11.3 を適用})$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx + \left( \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\Omega} f v \, dx - \int_{\Gamma_2} g_2 v \, d\sigma \right)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx \geq 0.$$

ゆえに  $J[u]$  は  $J[w]$  の最小値である。すなわち  $u$  は (V) の解である。 □

## 4.7.7 (W) の解が滑らかならば (P) の解

(3) の証明  $u$  が (W) の解であり、かつ十分滑らかと仮定する。(W) の解であるから、

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma_2} g v \, d\sigma \quad (v \in X)$$

を満たす。さらに滑らかであるので、左辺に Green の公式が適用できて

$$(*) \quad \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\sigma - \int_{\Omega} \Delta u v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma_2} g_2 v \, d\sigma \quad (v \in X).$$

特に  $v \in C_0^\infty(\Omega)$  の場合を考えると (境界上の積分が 0 なので)

$$- \int_{\Omega} \Delta u v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad (v \in C_0^\infty(\Omega)).$$

変分法の基本補題より

$$-\Delta u = f \quad (\text{in } \Omega).$$

これを (\*) に代入すると

$$\int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\sigma = \int_{\Gamma_2} g_2 v \, d\sigma \quad (v \in X).$$

再び変分法の基本補題より、 $\frac{\partial u}{\partial n} = g_2$  (on  $\Gamma_2$ ). ゆえに  $u$  は (P) の解である。証明終  
……… 以上、Dirichlet 原理の一般化

## 4.7.7 補足 変分法の基本補題

「任意の」(実際には「何かの条件を満たすすべての」)関数  $\varphi$  について  $\int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx = 0$  が成り立つならば、 $f = 0$  (in  $\Omega$ ), という形の命題を**変分法の基本補題** (fundamental lemma of calculus of variations) という。

色々なバージョンがあるが、次の形のもので用が足りることが多い。

### 命題 11.4 (変分法の基本補題)

$\Omega$  は  $\mathbb{R}^n$  の開集合、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  は局所可積分関数で

$$(\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)) \quad \int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx = 0$$

を満たすならば

$$f = 0 \quad (\text{a.e. on } \Omega).$$

$\Omega$  で局所可積分とは、 $\Omega$  に含まれる任意のコンパクト集合上で Lebesgue 積分可能ということ。

$f = 0$  (a.e on  $\Omega$ ) とは、 $\Omega$  に含まれるある測度 0 の集合  $N$  を除いて  $f = 0$  ということ。  
 $C_0^\infty(\Omega)$  については、次のページで説明する。

## 4.7.7 補足 $C_0^\infty(\Omega)$

$C_0^\infty(\Omega)$  という記号は、解析学で頻出する (知っておくと良い)。

$\Omega$  を  $\mathbb{R}^n$  の開集合とするとき、 $C_0^\infty(\Omega)$  を

$$C_0^\infty(\Omega) := \{v \in C^\infty(\Omega) \mid \text{supp } v \text{ はコンパクトで、} \Omega \text{ に含まれる}\}$$

で定める。ここで  $\text{supp } v$  は  $v$  の台 (the support of  $v$ ) と呼ばれる集合で、次式で定められる。

$$\text{supp } v := \overline{\{x \in \Omega \mid v(x) \neq 0\}}.$$

ここで  $\overline{\quad}$  は、 $\mathbb{R}^n$  における閉包を意味する。

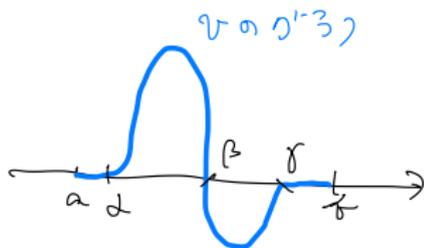
コンパクトとは、 $\mathbb{R}^n$  の部分集合  $K$  については、 $K$  が有界な閉集合ということである。

$v \in C_0^\infty(\Omega)$  とは、 $v$  が  $C^\infty$  級で、 $\partial\Omega$  のある近傍では  $v = 0$  を満たすことを意味する。

# 4.7.7 補足 $C_0^\infty(\Omega)$

$\text{supp } v \subset \Omega$  である必要がある。

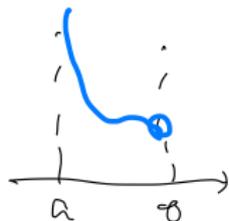
$$\Omega = (a, b) \quad \text{と仮定}$$



$$\{x \in \Omega \mid v(x) \neq 0\} = (\alpha, \beta) \cup (\beta, \gamma)$$

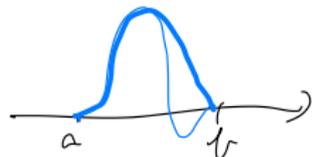
$$\text{supp } v = [\alpha, \beta] \cup [\beta, \gamma] \subset \Omega$$

$$\therefore v \in C_0^\infty(\Omega)$$



$$\text{supp } v = [a, b] \not\subset \Omega$$

$$\therefore v \notin C_0^\infty(\Omega)$$



$$\text{supp } v = [a, b]$$

$$\partial\Omega = \{a, b\} \text{ の付近で } v = 0$$

## 4.7.8 定理の使い道

(P) の解を求めたり、一意的な存在を示したいわけであるが、代わりに (W) (あるいは (V)) を考える。

(W) の解の一意的な存在を示すのは比較的容易である。また (W) の近似解を求めるのも簡単である (有限要素法がまさにそれをしてくれる)。

(W) の解が本当に (P) の解であるか? が問題になる。言い換えると

**(W) の解  $u$  は滑らかだろうか?**

この問は、一見細かいことのようにだが、**実はとても重要である。**

良く知られた (部分的な) 解答

- $\Omega$  が  $C^2$  級であれば (どういう意味か説明していないが) Yes.
- $\Omega$  が多角形の場合、凸ならば Yes, 凸でないならば一般には No.

(FreeFem++ の例で、**L字型の領域**や、**立方体から小さい立方体を除いた領域**がしばしば登場するが、このあたりのこと (領域の凸性) を問題にしているわけである。)

## 4.8 ポテンシャル問題の数値解法 (2) 基本解の方法

### 4.8.1 $-\Delta$ の基本解

次の関数  $E$  は、 $-\Delta$  の**基本解** (fundamental solution) と呼ばれる。

$$(11) \quad E(x) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |x| & (2 \text{次元の場合, } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \\ \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x|} & (3 \text{次元の場合, } x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}). \end{cases}$$

一体何者か？

**数学的な解答** 次を満たす。ここで  $\delta$  は **Dirac のデルタ超関数**。

$$(12) \quad -\Delta E = \delta \quad (\Delta \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}).$$

**物理的な解答 (解釈)**  $E$  は**原点に置かれた単位点電荷の作る電場のポテンシャル (電位)** である。

(Cf. 密度  $\rho$  で分布する場合のポテンシャル  $u$  は  $-\Delta u = \rho$  を満たす。)

## 4.8.1 $-\Delta$ の基本解

なぜ基本解は重要か？重ね合わせることで“任意”の電荷分布  $\rho$  のポテンシャルが得られる。

### 定理 (のようなもの) Poisson 方程式の特解

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\rho: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  が与えられたとき

$$(13) \quad u(x) := \int_{\Omega} E(x-y)\rho(y) dy \quad (x \in \Omega)$$

とおくと次式が成り立つ。

$$(14) \quad -\Delta u = \rho \quad (\text{in } \Omega).$$

$E$  には特異性があるので、(14) を証明するのは少し難しい (神保 [8] など)。物理的には次のように納得できる。

微小体積  $dy$  に存在する電荷は  $\rho(y) dy$  で、それが作る電場のポテンシャルは (基本解を平行移動したものの電荷量倍で)  $E(x-y)\rho(y) dy$ . それを  $\Omega$  全体でトータルした  $u$  がポテンシャルになる。実際、 $\mathbf{E} := -\text{grad } u$  は電場で、Maxwell の方程式の 1 つ  $\text{div } \mathbf{E} = \rho$  から、 $-\text{div grad } u = \rho$  が得られる。すなわち (14) が成り立つ。

## 4.8.2 基本解の方法のアルゴリズム (電荷の作る電場の電位でポテンシャルを近似)

ポテンシャル問題の数値解法 (近似解法) への応用「**基本解の方法 (the method of fundamental solutions)**」を紹介する。

Dirichlet 境界値問題を考えよう (Neumann 境界値問題でも同様)。

$$(15) \quad \Delta u = 0 \quad (\text{in } \Omega)$$

$$(16) \quad u = g \quad (\text{on } \partial\Omega).$$

ここで  $\Omega$  は  $\mathbb{R}^n$  ( $n = 2$  or  $n = 3$ ) の領域である。

$\Omega$  の外部に、 $\Omega$  を取り囲むように、有限個の点  $y_1, \dots, y_N$  を取り、各  $y_k$  に電荷量  $Q_k$  の電荷を置く。

## 4.8.2 アルゴリズム (電荷の作る電場の電位でポテンシャルを近似)

それらの電荷の作る電場のポテンシャルは

$$(17) \quad u^{(N)}(x) := \sum_{k=1}^N Q_k E(x - y_k).$$

$\Delta E = 0$  (in  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ) であるから、 $Q_k$  の取り方によらず

$$\Delta u^{(N)}(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n \setminus \{y_1, \dots, y_N\}). \quad \text{特に} \quad \Delta u^{(N)} = 0 \quad (\text{in } \Omega).$$

後は  $Q_k$  をうまく選んで、境界条件 (16)  $u = g$  (on  $\partial\Omega$ ) を近似的に満たすようにする。

一つのやり方として、 $\partial\Omega$  上に  $N$  個の点  $x_1, \dots, x_N$  を取って

$$(18) \quad u^{(N)}(x_j) = g(x_j) \quad (j = 1, \dots, N).$$

これで  $Q_k$  ( $k = 1, \dots, N$ ) が定まることはすぐ分かる (次のスライド)。

非常に素朴な感じがするが、とてもうまく行くことが多い。

## 4.8.2 アルゴリズム (電荷の作る電場の電位でポテンシャルを近似)

(18) は次の連立 1 次方程式と同値である。

$$\begin{pmatrix} E(x_1 - y_1) & E(x_1 - y_2) & \cdots & E(x_1 - y_N) \\ E(x_2 - y_1) & E(x_2 - y_2) & & E(x_2 - y_N) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ E(x_N - y_1) & E(x_N - y_2) & \cdots & E(x_N - y_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(x_1) \\ g(x_2) \\ \vdots \\ g(x_N) \end{pmatrix}.$$

Gauss の消去法などを用いて、 $Q_k$  ( $k = 1, \dots, N$ ) が求められる。

(いわゆる密行列であるが、それほど大きな  $N$  は必要ないので、難しくない。)

## 4.8.3 基本解の方法の特徴

- ① ある  $\rho$  ( $0 < \rho < 1$ ),  $C$  が存在して

$$\|u - u^{(N)}\| \leq C\rho^N \quad (\|\cdot\| \text{ は適当なノルム})$$

が成り立つ (誤差の指数関数的減少, 次のスライドで数値例を示す)。しばしば、高精度の解が非常に少ない計算量で得られることが期待できる。

Cf. 差分法, 有限要素法では、典型的な場合に  $\|u - u^{(N)}\| \leq \frac{C}{N^2}$  とか。

- ②  $u^{(N)}$  は調和関数である。特に  $\text{grad } u^{(N)}$  の計算が簡単:

$$\text{grad } u^{(N)}(x) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N Q_k \frac{x - y_k}{|x - y_k|^2} \quad (2 \text{次元の場合}).$$

(例えばポテンシャル流の計算を思い浮かべると、超便利と分かる。)

しかも  $\|\text{grad } u - \text{grad } u^{(N)}\|$  も指数関数的に減少する。

Cf. 差分法や有限要素法では、微分が難しかったり、精度が下がったりする。

- ③ 理論的な基礎づけは、差分法、有限要素法と比べて不十分である。  
④ 同次方程式にしか適用できない、具体的な基本解が必要 → 汎用性は低い。

汎用性低いが、使えるときは、差分法・有限要素法に性能で勝る場合が多い。

## 4.8.3 基本解の方法の特徴 数値例

$\Omega$  が円盤  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |\mathbf{x}| < 1\}$  の場合に、原点中心半径  $R = 2$  の円周上に一様に電荷点  $y_k$  を配置した場合の近似解の精度を示す。

左が  $g(\mathbf{x}) = \text{Re}[(x + iy)^m]$ , 右が  $g(\mathbf{x}) = \log|\mathbf{x} - \mathbf{p}|$  ( $\mathbf{p} = (p, 0)$ ) の場合。

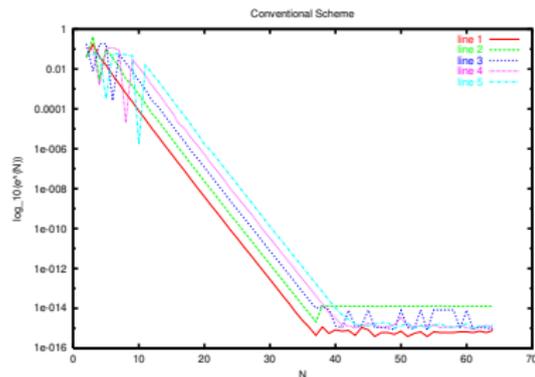


図 1:  $m = 1, \dots, 5$

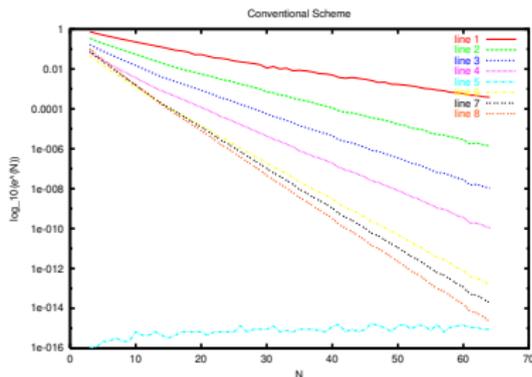


図 2:  $p = 1.2, 1.4, \dots, 2.6$ .  $p$  が大きい (特異点が遠い) ほど速く減衰

**誤差の減少は非常に速い！**

片側対数目盛で、直線上にのることから、誤差が指数関数的に減少している。減少の速さについては研究されていて、ある程度まで説明可能である。

## 4.8.4 数値等角写像に対する天野の方法

天野要は、§4.4 で述べた等角写像の求め方 (定理 8.6) と、基本解の方法を組み合わせた、数値等角写像 (領域の写像関数を数値的に求めること) の効率的なアルゴリズムを提唱した (天野 [9])。それを解説する。

§4.4 で導入した記号を用いる。

$u$  の近似  $u^{(N)}$  を基本解の方法で求めよう。  $N \in \mathbb{N}$  に対して、  $\{\zeta_k\}_{k=1}^N$  を「 $\Omega$  を取り囲むように」  $\mathbb{C} \setminus \bar{\Omega}$  から選び、

$$(19) \quad u^{(N)}(z) := \sum_{k=1}^N Q_k \log |z - \zeta_k|$$

とおく。ここで  $Q_k$  ( $k = 1, \dots, N$ ) は未知の実定数である。

$\{z_j\}_{j=1}^N$  を  $\partial\Omega$  から選び、連立 1 次方程式

$$(20) \quad u^{(N)}(z_j) = -\log |z_j - z_0| \quad (j = 1, \dots, N)$$

を解いて  $Q_k$  ( $k = 1, \dots, N$ ) が求められる。

## 4.8.4 数値等角写像に対する天野の方法

$u^{(N)}$  の共役調和関数  $v^{(N)}$  ( $u^{(N)}$  を実部に持つ正則関数) を求めたい。  
天下りになるが、

$$(21) \quad f^{(N)}(z) := Q_0 + \sum_{k=1}^N Q_k \operatorname{Log} \frac{z - \zeta_k}{z_0 - \zeta_k}, \quad Q_0 := \sum_{k=1}^N Q_k \log |z_0 - \zeta_k|$$

とおく。ここで  $\operatorname{Log}$  は主値を表すとする ( $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  を定義域とする)。

$$\operatorname{Re} f^{(N)}(z) = \sum_{k=1}^N Q_k \log |z_0 - \zeta_k| + \sum_{k=1}^N Q_k \log \left| \frac{z - \zeta_k}{z_0 - \zeta_k} \right| = \sum_{k=1}^N Q_k \log |z - \zeta_k| = u^{(N)}(z)$$

である。さらに

$$f^{(N)}(z_0) = Q_0 + \sum_{k=1}^N Q_k \operatorname{Log} \frac{z_0 - \zeta_k}{z_0 - \zeta_k} = Q_0 + \sum_{k=1}^N 0 = Q_0 \in \mathbb{R}.$$

言い換えると  $\operatorname{Im} f^{(N)}(z_0) = 0$ 。この  $f^{(N)}$  は、 $f = u + iv$  の良い近似であると考えられる。

## 4.8.4 数値等角写像に対する天野の方法

以上をまとめると、次のアルゴリズムが得られる。

$$(再掲 19) \quad u^{(N)}(z) := \sum_{k=1}^N Q_k \log |z - \zeta_k|,$$

$$(再掲 20) \quad u^{(N)}(z_j) = -\log |z_j - z_0| \quad (j = 1, \dots, N),$$

$$(再掲 21) \quad f^{(N)}(z) := Q_0 + \sum_{k=1}^N Q_k \operatorname{Log} \frac{z - \zeta_k}{z_0 - \zeta_k}, \quad Q_0 := \sum_{k=1}^N Q_k \log |z_0 - \zeta_k|$$

### 天野のアルゴリズム

①  $\{\zeta_k\}_{k=1}^N \subset \mathbb{C} \setminus \bar{\Omega}$ ,  $\{z_j\}_{j=1}^N \subset \partial\Omega$  を適当に選ぶ。

② (19), (20) で  $\{Q_k\}$  を求める (つまり  $\sum_{k=1}^N Q_k |z_j - \zeta_k| = -\log |z_j - z_0|$  ( $j = 1, \dots, N$ ) という連立 1 次方程式を解く)。

③ (21) で  $f^{(N)}$  を定める。

④  $\varphi^{(N)}(z) := (z - z_0) \exp f^{(N)}(z)$  で定義される  $\varphi^{(N)}$  を、等角写像  $\varphi: \Omega \rightarrow D_1$  の近似解に採用する。

## 4.8.5 Jordan 領域の等角写像の計算プログラム

以下の Python プログラム conformalmap-v2.py では

$$\Omega = D_1 \stackrel{\text{def.}}{=} \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}, \quad z_0 = \frac{1}{2}$$

の場合の  $\Omega$  の写像関数、すなわち双正則な  $\varphi: \Omega \rightarrow D_1$  で

$$\varphi(z_0) = 0, \quad \varphi'(z_0) > 0$$

を満たすものを求める。この場合、実は次の 1 次分数変換が解である。

$$\varphi(z) = \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}.$$

プログラム入手 — ターミナルで次を実行 —

```
curl -O https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2/conformalmap-v2.py
```

ターミナルで次のように実行 —

```
python conformalmap-v2.py
```

## 4.8.5 Jordan 領域の等角写像の計算プログラム

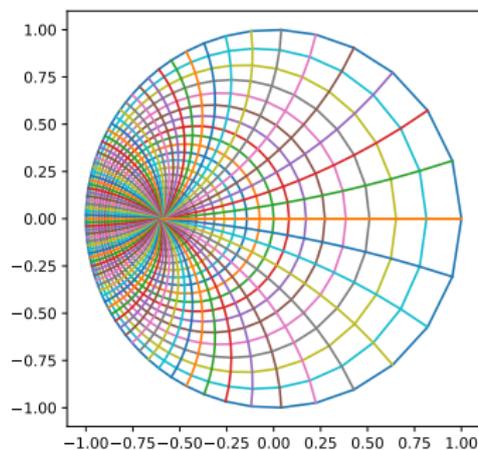


図 3:  $z_0 = 0.6$  の場合.  $w = \varphi(z)$  による  $z$  平面の原点中心の同心円、単位円の半径の像を描いた。

# 参考文献 I

- [1] Ahlfors, K.: *Complex Analysis*, McGraw Hill (1953), 笠原 乾吉 訳, 複素解析, 現代数学社 (1982).
- [2] Hecht, F.: Freefem++, <https://github.com/FreeFem/FreeFem-doc/raw/pdf/FreeFEM-documentation.pdf>, 以前は <http://www3.freefem.org/ff++/ftp/freefem++doc.pdf> にあった。 (??).
- [3] 大塚厚二, 高石武史: 有限要素法で学ぶ現象と数理 — FreeFem++数理思考プログラミング —, 共立出版 (2014), <https://sites.google.com/a/comfos.org/comfos/ffempp> というサポート WWW サイトがある。 Maruzen eBook に入っているので, <https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000018545> でアクセス出来る。
- [4] 菊地文雄: 有限要素法概説, サイエンス社 (1980), 新訂版 1999.
- [5] Brezis, H.: 関数解析, 産業図書 (1988), (藤田 宏, 小西 芳雄 訳), 原著は版を改めて、より内容豊富になっています。
- [6] Brezis, H.: *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer (2011).

- [7] 桂田祐史：ベクトル解析早見表, [https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/applied-complex-function-2024/vector\\_analysis.pdf](https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/applied-complex-function-2024/vector_analysis.pdf) (2021/5/31～).
- [8] 神保秀一：偏微分方程式入門, 共立出版 (2006).
- [9] 天野 <sup>かなめ</sup> 要：代用電荷法に基づく等角写像の数値計算法, 情報処理学会論文誌, Vol. 28, No. 27, pp. 697–704 (1987).

# 参考文献 III