

# 応用複素関数 第9回

## ～ 流体力学への応用 (4) ～

かつらだ まさし  
桂田 祐史

2024年6月18日

# 目次

- 1 本日の内容・連絡事項
- 2 流体力学への複素関数の応用 (続き)
  - 簡単な関数の表す流れ
    - 一様流
    - 湧き出しと吸い込み
    - 渦糸 (点渦)
    - Mathematica で可視化する
  - 流れの合成
    - 一様流と湧き出しの重ね合わせ — ある無限物体をよぎる流れ
    - 同じ強さの湧き出し・吸い込みの対
    - 同じ強さ反対向きの渦の対
    - ランキンの卵形 (Rankine body)
    - 2重湧き出し (doublet)
    - 円柱を過ぎる一様流
- 3 ポテンシャル問題
  - はじめに
  - Poisson 方程式の境界値問題
  - Dirichlet の原理
    - 証明
    - 反省

今井 [1], [2]

だぶっているので、一度印刷して推敲する。

## 3.15 簡単な関数の表す流れ 3.15.1 一様流

1 次関数  $f(z) = cz$ ,  $c = p - iq$  (ただし  $p, q \in \mathbb{R}$ ) のとき、

$$f(x + yi) = (p - iq)(x + yi) = px + qy + i(-qx + py),$$

$$\phi(x, y) = \operatorname{Re} f(x + yi) = px + qy,$$

$$\psi(x, y) = \operatorname{Im} f(x + yi) = -qx + py.$$

等ポテンシャル線 ( $\phi = \text{const.}$ ) も、流線 ( $\psi = \text{const.}$ ) も平行直線群であり、(もちろん) それらは互いに直交する。

$$u - iv = f' = c = p - iq.$$

復習: 正則関数  $f$  の定める速度場の成分を  $u, v$  とすると、 $f' = u - iv$ .

ゆえに  $f$  を複素速度ポテンシャルとする流れの速度場は

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

これは定数である。そのため (場所によらないため) **一様流** と呼ばれる。

## 3.15.1 一様流 続き

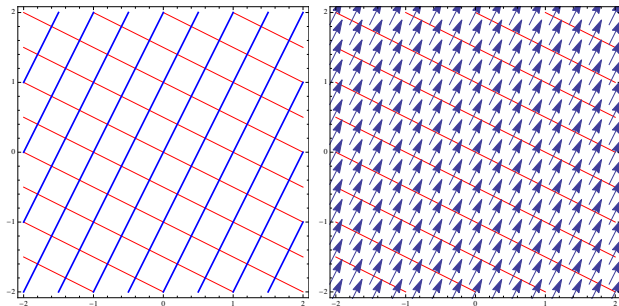


図 1: 一様流の等ポテンシャル線 (赤)、流線 (青) と速度ベクトル

## 3.15.2 湧き出しと吸い込み

$m \in \mathbb{R}$ ,  $f(z) = m \log z$  ( $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ). この  $f$  は ( $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  では) 多価なので、気持ち悪いが、分枝は定数差しかなく、微分すると一価である。

$z = re^{i\theta}$  ( $r \geq 0, \theta \in \mathbb{R}$ ) とすると

$$f(re^{i\theta}) = m(\log r + i\theta) = m \log r + im\theta.$$

速度ポテンシャルと流れ関数は

$$\phi(x, y) = \operatorname{Re} f(z) = m \log r, \quad \psi(x, y) = \operatorname{Im} f(z) = m\theta.$$

等ポテンシャル線 ( $\phi = m \log r = \text{定数}$ ) は原点を中心とする同心円群、流線 ( $\psi = m\theta = \text{定数}$ ) は原点を始点とする半直線群である (もちろん互いに直交)。一方

$$u - iv = f'(z) = \frac{m}{z} = \frac{m}{re^{i\theta}} = \frac{m}{r} (\cos \theta - i \sin \theta).$$

ゆえに流れの速度場は

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m}{r} \cos \theta \\ \frac{m}{r} \sin \theta \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{v}$  の方向は、 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$  と同じ。

$m > 0$  ならば向きも同じ (湧き出し)、 $m < 0$  ならば向きは逆 (吸い込み)。

$\mathbf{v}$  の大きさ  $|\mathbf{v}|$  は  $\frac{|m|}{r}$  で、原点からの距離に反比例している。

### 3.15.2 湧き出しと吸い込み (続き)

原点を正の向きに一周する閉曲線  $C$  に対し、 $C$  から外に湧き出る流量は

$$\int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds = \operatorname{Im} \int_C f'(z) \, dz = \operatorname{Im} \int_C \frac{m}{z} \, dz = 2\pi m \quad (C \text{ によらない}).$$

この流れは、 $m > 0$  ならば原点においた**湧き出し** (source),  $m < 0$  ならば原点に置いた**吸い込み** (sink) と呼ばれる。

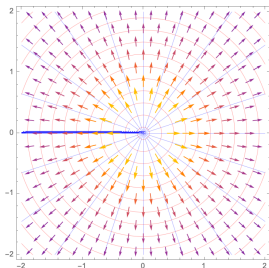


図 2: 湧き出しの等ポテンシャル線, 流線, 速度場

### 3.15.3 渦糸 (点渦)

$\kappa \in \mathbb{R}$ ,  $f(z) = i\kappa \log z$  ( $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ) …( $i$ がかかっている).

$z = re^{i\theta}$  ( $r \geq 0$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ ) とすると

$$f(re^{i\theta}) = i\kappa(\log r + i\theta) = -\kappa\theta + i\kappa \log r,$$

速度ポテンシャルと流れ関数は

$$\phi(x, y) = \operatorname{Re} f(z) = -\kappa\theta, \quad \psi(x, y) = \operatorname{Im} f(z) = \kappa \log r.$$

等ポテンシャル線 ( $\phi = -\kappa\theta = \text{一定}$ ) は原点を始点とする半直線群、流線 ( $\psi = \kappa \log r = \text{一定}$ ) は原点を中心とする同心円群。

$$u - iv = f'(z) = \frac{i\kappa}{z} = \frac{i\kappa}{r} (\cos \theta - i \sin \theta) = \frac{\kappa}{r} (\sin \theta + i \cos \theta).$$

ゆえに流れの速度場は

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{\kappa}{r} \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{v}$  の方向は  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  を  $-\frac{\pi}{2}$  回転した方向である。

$\kappa > 0$  ならば向きも同じ (時計回り)、 $\kappa < 0$  ならば向きは逆 (反時計回り)。

$\mathbf{v}$  の大きさは  $\frac{|\kappa|}{r}$  で、原点からの距離に反比例する。



### 3.15.3 渦糸 (点渦) 続き

この流れは、原点に置かれた<sup>うずいと</sup>渦糸 (vortex filament, vortex string) または<sup>てんうず</sup>点渦 (point vortex) と呼ばれる。

渦度は  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  全体で 0. (渦度が原点に集中していて他は渦なし、と考えるべきかもしれない。)

**問**  $\text{rot } \mathbf{v} = 0$  を確かめよ ( $f$  は一価正則でなく、前回の説明の範疇には収まらないので、念のため確認)。

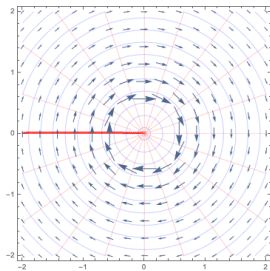


図 3: 点渦の等ポテンシャル線, 流線, 速度場

## 3.15.4 Mathematica で可視化する

以上の単純な場合は、紙とペンでも十分理解可能であるが、この辺で文明の利器を。

コマンドをコピーできると便利なので、この部分の資料は WWW に置く。

「簡単な正則関数を複素速度ポテンシャルとする流れの可視化」  
[https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2/fluid\\_mathematica/](https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2/fluid_mathematica/)

## 3.14 流れの合成

2つの2次元渦なし非圧縮流があり、速度場をそれぞれ  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ , また複素速度ポテンシャルを  $f_1, f_2$  とする。このとき  $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$  を速度場とする流れは、やはり2次元渦なし非圧縮流であり、その複素速度ポテンシャルは  $f_1 + f_2$  である。

実際、

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}_1 = \operatorname{rot} \mathbf{v}_2 = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_1 = \operatorname{div} \mathbf{v}_2 = 0$$

であれば

$$\operatorname{rot} (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = 0,$$

$$\operatorname{div} (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = 0,$$

$$\begin{aligned} (f_1 + f_2)' &= f_1' + f_2' = (u_1 - iv_1) + (u_2 - iv_2) \\ &= (u_1 + u_2) - i(v_1 + v_2). \end{aligned}$$

流れを合成 (重ね合わせ) するには、複素速度ポテンシャルを足せば良い

### 3.14.1 一様流と湧き出しの重ね合わせ — ある無限物体をよぎる流れ

$U, m > 0$  とする。一様流  $f_1(z) = Uz$  と、湧き出し  $f_2(z) = m \log z$  の重ね合わせの複素速度ポテンシャルは

$$\begin{aligned} f(z) &= f_1(z) + f_2(z) \\ &= Uz + m \log z = Ur \cos \theta + m \log r + i(Ur \sin \theta + m\theta). \end{aligned}$$

ゆえに流れ関数は

$$\psi = Ur \sin \theta + m\theta.$$

$\theta = 0$  とすると  $\psi = 0$ , また  $\theta = \pi$  とすると  $\psi = m\pi$  であるから、これらは  $\psi$  の等高線である。ゆえに実軸 (原点を除く) は流線である。

また  $\theta \in (0, 2\pi)$ ,  $\theta \neq \pi$  とすると

$$(1) \quad \psi = m\pi \Leftrightarrow Ur \sin \theta + m\theta = m\pi \Leftrightarrow r = \frac{m(\pi - \theta)}{U \sin \theta} \Leftrightarrow r = \frac{m}{U} \cdot \frac{\varphi}{\sin \varphi}.$$

ただし  $\varphi := \pi - \theta$ .

$\theta \in (0, \pi)$  ( $\varphi \in (0, \pi)$ ) と  $\theta \in (\pi, 2\pi)$  ( $\varphi \in (-\pi, 0)$ ) で分けて考える。

### 3.14.1 一様流と湧き出しの重ね合わせ — ある無限物体をよぎる流れ

実はこれは右方向に無限に伸びる U 字型の曲線である<sup>1</sup>。流体が非粘性流体の場合、これを壁面とする物体を (U 字形領域に) 入れても、流れは影響は受けない。ゆえに、この流れは、その形の物体をよぎる流れを表している。

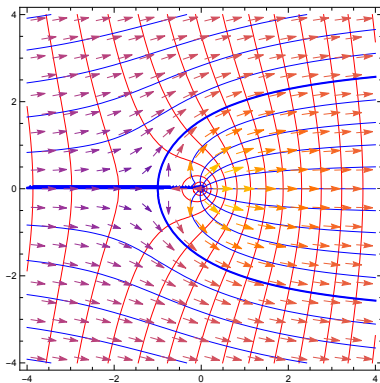


図 4: 一様流と湧き出しの重ね合わせ (太線は  $\psi = \pm m\pi$ )

### 3.14.2 同じ強さの湧き出し・吸い込みの対

$z = a$  に置いた強さ  $m$  の湧き出し、 $z = -a$  に置いた強さ  $m$  の吸い込みを重ね合わせる。

$$f(z) := m \log(z - a) - m \log(z + a) = m \log \frac{z - a}{z + a}.$$

(途中で分枝が気になるが、右辺は  $\mathbb{C} \setminus [-a, a]$  で一価正則である！)

分子、分母の  $z$  を、それぞれ  $z = a + r_1 e^{i\theta_1}$ ,  $z = -a + r_2 e^{i\theta_2}$  で置き換えると

$$f(z) = m((\log r_1 + i\theta_1) - (\log r_2 + i\theta_2)) = m \log \frac{r_1}{r_2} + im(\theta_1 - \theta_2).$$

等ポテンシャル線の方程式は  $\frac{r_1}{r_2} = \text{定数}$ . アポロニウスの円を表す。

流線の方程式は  $\Theta := \theta_1 - \theta_2 = \text{定数}$ .  $\Theta$  は  $a, -a$  から点  $z$  を見込む角であるので、2点  $\pm a$  を結ぶ線分を弦とする円弧である (円周角の定理の逆による)。

### 3.14.2 同じ強さの湧き出し・吸い込みの対 (続き)

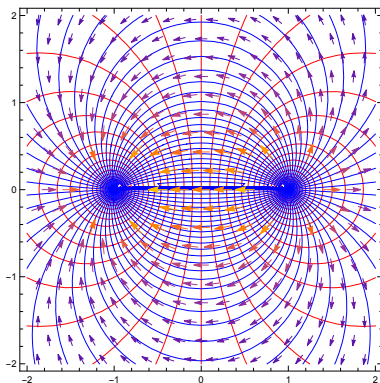


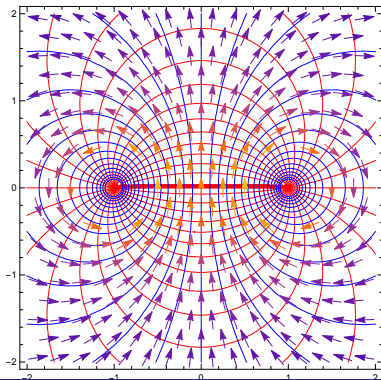
図 5: 同じ強さの湧き出しと吸い込みの重ね合わせ

### 3.14.3 同じ強さ反対向きの渦の対

等しい強さを持ち、回転の向きが反対の点渦を  $z = a, -a$  に置いて重ね合わせた流れの複素速度ポテンシャルは

$$f(z) := i\kappa \log \frac{z - a}{z + a}.$$

等ポテンシャル線、流線の方程式はそれぞれ  $\theta_1 - \theta_2 = \text{定数}$ ,  $\frac{r_1}{r_2} = \text{定数}$  で、どちらも円を表す。





### 3.14.4 ランキンの卵形 (Rankine body)

$U, m, a > 0$  とする。一様流  $f_1(z) = Uz$ ,  $-a$  に置いた湧き出し  $f_2(z) = m \log(z + a)$ ,  $a$  に置いた吸い込み  $f_3(z) = -m \log(z - a)$  を重ね合わせる。

$$f(z) := Uz + m \log(z + a) - m \log(z - a) = Uz + m \log \frac{z + a}{z - a}.$$

流れ関数は

$$\psi = Uy - m(\theta_1 - \theta_2) = Uy - m \tan^{-1} \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}.$$

実軸  $y = 0$  では、 $\psi = 0$  であるから、実軸は1つの流線である。また

$$\psi = 0 \Leftrightarrow y = \frac{m}{U} \tan^{-1} \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}.$$

この方程式は卵形の曲線を表す。これを **Rankine の卵形** (the Rankine body) と呼ぶ。

### 3.14.4 ランキンの卵形 (Rankine body) 続き

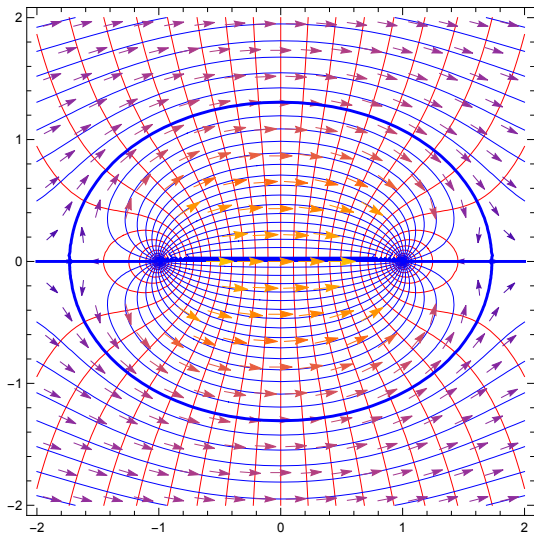


図 7: Rankine の卵形 (同じ強さの湧き出し・吸い込みと一様流の重ね合わせ)

### 3.14.5 2重湧き出し (doublet)

同じ強さの湧き出し・吸い込み対の流れの複素速度ポテンシャルは

$$f(z) = m \log(z - a) - m \log(z + a).$$

$\mu > 0$  を取り、 $2am = \mu$  という関係式を保ったままで、 $a \rightarrow 0$  とした極限を考えよう。

$$\begin{aligned} f(z) &= m \log(z - a) - m \log(z + a) = -\mu \frac{\log(z + a) - \log(z - a)}{2a} \\ &\rightarrow F(z) := -\mu \frac{d}{dz} \log z = -\frac{\mu}{z} = \frac{-\mu x}{x^2 + y^2} + i \frac{\mu y}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

$F$  を複素速度ポテンシャルとする流れを**二重湧き出し** (doublet) と呼ぶ。

### 3.14.5 2重湧き出し (doublet) (続き)

$F(z) := -\frac{\mu}{z}$  の定める流れの等ポテンシャル線は、実軸上に中心を持ち原点を通る円、または虚軸 (原点を除く) である。

一方、流線は、虚軸上に中心を持ち原点を通る円または実軸 (原点を除く) である。

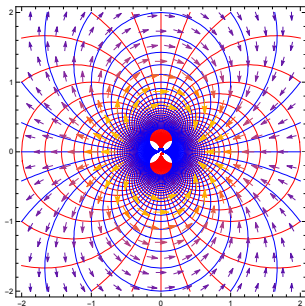


図 8: 二重湧き出し (同じ強さの湧き出し・吸い込みの極限)

### 3.14.6 円柱を過ぎる一様流

ランキンの卵形で  $2am = \mu$  (正定数) として  $a \rightarrow 0$  としてみよう (二重湧き出しと一様流との重ね合わせ、とも言える)。

$$f(z) = Uz + \frac{\mu}{z} = U \left( z + \frac{R^2}{z} \right), \quad R := \sqrt{\mu/U}.$$

$$f(re^{i\theta}) = U \left( r \cos \theta + i \sin \theta + \frac{R^2}{r} (\cos \theta - i \sin \theta) \right)$$

であるから、速度ポテンシャル  $\phi$  と流れ関数  $\psi$  は

$$\phi = U \left( r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \theta, \quad \psi = U \left( r - \frac{R^2}{r} \right) \sin \theta.$$

特に円周  $r = R$  上で  $\psi = 0$  であるから、 $r = R$  は流線である。

### 3.14.6 円柱を過ぎる一様流 (続き)

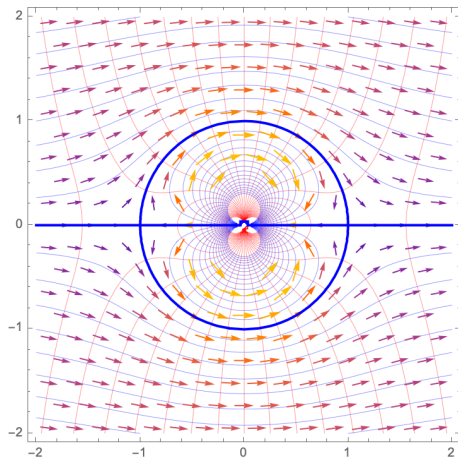


図 9: 円柱を過ぎる一様流

完全流体の一様流の中に円柱を入れると

2024/6/18 の講義でここまで行きますように。

## 4 ポテンシャル問題

### 4.1 はじめに

まず復習から。非圧縮渦なし (ポテンシャル) 流の速度ポテンシャル  $\phi$  は次を満たす (第 6 回授業)。

$$(2) \quad \Delta\phi = 0 \quad (\text{in } \Omega)$$

$$(3) \quad \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \quad (\text{on } \partial\Omega).$$

$\partial\Omega$  上の  $\mathbf{v}$  が分かれば、(2), (3) は、Laplace 方程式の Neumann 境界値問題である。(かなり一般的な条件下で) 定数差を除いて一意的に解が存在する。

$\phi$  が求まれば、 $\mathbf{v} = \text{grad } \phi$  により  $\mathbf{v}$  が得られ、流れが決定される。

$\partial\Omega$  上の  $\mathbf{v}$  さえ分かれば、(2), (3) を解いて流れが求まる。

前節で既知の正則関数を組み合わせることで色々な 2 次元流れを表す、という手法を紹介した。例えば円柱周りの一様流の問題などを解いた。扱える問題の範囲が異なり、どちらが優れているとも言えないが、こちらの方法の有効性を想像するのは難しくないであろう (実際、とても強力である)。



## 4.2 Poisson 方程式の境界値問題 (その重要性の説明)

Laplace 方程式の境界値問題 (2), (3) を少し一般化する。

$\Omega$  は  $\mathbb{R}^n$  ( $n = 2, 3$ ) の領域、 $\Gamma := \partial\Omega$  は

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \quad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$$

と分割されていて、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g_1: \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g_2: \Gamma_2 \rightarrow \mathbb{R}$  が与えられたとする。また  $\mathbf{n}$  は、 $\Gamma_2$  上の点における外向き単位法線ベクトルとする。

このとき  $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  で、次の方程式を満たすものを求めることを考える。

$$\begin{aligned} (4) \quad & -\Delta u = f \quad (\text{in } \Omega) \\ (5) \quad & u = g_1 \quad (\text{on } \Gamma_1) \\ (6) \quad & \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g_2 \quad (\text{on } \Gamma_2). \end{aligned}$$

(4) は有名な ポアソン **Poisson方程式** である。

(5), (6) はそれぞれ ディリクレ Dirichlet 境界条件, ノイマン Neumann 境界条件と呼ばれる。

## 4.2 Poisson 方程式の境界値問題 (その重要性の説明)

Poisson 方程式は、**楕円型偏微分方程式の典型例**であり、様々な現象のモデルに登場する。

**重力場**  $f$  は (質量分布の) 密度,  $\phi$  はポテンシャル・エネルギー

**静電場**  $f$  は電荷密度,  $\phi$  は電位

**熱平衡**  $f$  が発生する熱量,  $\phi$  は温度

この問題は数学的に非常に詳しく研究されてきた。一般に解の存在が証明できたのは 20 世紀に入ってからである。

その中でも  $f = 0$  の場合 (Laplace 方程式  $\Delta u = 0$ ) がとりわけ重要である。これは関数論においても、多くの基本的な結果を得るための基礎となる (調和関数を決定する問題だから)。

ポテンシャル問題には、**差分法** (FDM, finite difference method)、**有限要素法** (FEM, finite element method) をはじめとする多くの数値計算法が適用できる。特に Laplace 方程式の場合は、**基本解の方法** (method of fundamental solution) が有力である。

## 4.5 Dirichlet の原理

Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題

$$(7a) \quad \Delta u = 0 \quad (\text{in } \Omega),$$

$$(7b) \quad u = g \quad (\text{on } \partial\Omega)$$

の解  $u$  の存在を示すため、Riemann は次のように考えた。

境界条件 (7b) を満たす関数の全体  $X$  と、 $X$  上の汎関数  $J$  を考える。

$$X := \{u \mid u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}, (\forall x \in \partial\Omega) u(x) = g(x)\}.$$

$$J[u] := \iint_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2) dx dy \quad (u \in X).$$

### Dirichlet の原理

$J$  の最小値を与える  $u$  は  $\Delta u = 0$  (in  $\Omega$ ) を満たす。

したがって  $J$  の最小値を与える  $u$  は (7a), (7b) の解である。

Riemann (1826–1866) は、Dirichlet (1805–1859) 先生の講義の中で Dirichlet の原理を聴いたそうである。

## 4.5 Dirichlet の原理

### 証明

$v: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  は、 $v = 0$  (on  $\partial\Omega$ ) を満たす任意の関数とする。任意の  $t \in \mathbb{R}$  に対して  $u + tv \in X$  である。仮定より

$$f(t) := J[u + tv] \quad (t \in \mathbb{R})$$

は  $t = 0$  で最小値をとる。ところが

$$f(t) = J[u] + 2t \iint_{\Omega} (u_x v_x + u_y v_y) dx dy + t^2 \iint_{\Omega} (v_x^2 + v_y^2) dx dy$$

は  $t$  の 2 次関数であり、 $t = 0$  で最小となるので、1 次の係数は 0 である:

$$(8) \quad \iint_{\Omega} (u_x v_x + u_y v_y) dx dy = 0.$$

**Green の公式**  $(\iint_{\Omega} \Delta u v dx dy = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma - \iint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx dy)$  より

$$\iint_{\Omega} \Delta u v dx dy = 0.$$

これが任意の  $v$  について成り立つことから (**変分法の基本補題により**)

$$\Delta u = 0 \quad (\text{in } \Omega). \quad \square$$

## 4.5 Dirichlet の原理

### 反省

Riemann は、汎関数  $J[u]$  を最小にする  $u \in X$  の存在は明らかだと考えた。

$J$  は下に有界 ( $J[u] \geq 0$ ) であるから、 $J$  は下限を持つ。それは最小値のはず…

それに Weierstrass が疑義を呈した (「下限は本当に最小値？」とツッコミを入れた)。これに Riemann は存命中に答えられなかった。

現代的な解説をすると、関数空間は無限次元空間なので、有界閉集合上の連続関数であっても、最小値を持たないことがある。

ポテンシャル問題は重要なため、解の存在について、多くの人が努力して Dirichlet 原理を用いない証明がいくつか発見されたが、Riemann の発表から約 50 年後 (1900 年頃)、D. Hilbert が Dirichlet 原理に基づく証明を発表し、肯定的に解決した。

今では解の存在証明は、このルートをたどるのがスタンダードになっている。…でも応用複素関数としては、ここから数値計算法に舵を切る (存在証明については、関数解析か偏微分方程式論で学んでください)。

- [1] 今井功：複素解析と流体力学, 日本評論社 (1981/10/20, 1989/4/1).
- [2] 今井功：等角写像とその応用, 岩波書店 (2013/9/10).