

応用複素関数 第8回

～ 流体力学への応用 (3) ～

かつらだ まさし
桂田 祐史

2024年6月11日

目次

- ① 本日の内容・連絡事項
- ② 流体力学への複素関数の応用 (続き)
 - ポテンシャル流 (続き)
 - 非圧縮ポテンシャル流まとめ
 - 2次元流
 - 渦度, 渦無しの流れ
 - 非圧縮流と流れ関数
 - 2次元単連結領域における非圧縮ポテンシャル流
 - 2次元非圧縮渦なし流と関数論との関係
 - 簡単な関数の表す流れ
 - 一様流
 - 湧き出しと吸い込み
 - 渦糸 (点渦)
 - Mathematica で可視化する
 - 流れの合成
 - 一様流と湧き出しの重ね合わせ — ある無限物体をよぎる流れ
 - 同じ強さの湧き出し・吸い込みの対
 - 同じ強さ反対向きの渦の対
 - ランキンの卵形 (Rankine body)
 - 2重湧き出し (doublet)
 - 円柱を過ぎる一様流

今井 [1], [2]

だぶっているので、一度印刷して推敲する。

3.12.3 非圧縮ポテンシャル流まとめ

3次元で、非圧縮のポテンシャル流は、Laplace 方程式の Neumann 境界値問題を解くことで「解ける」ことが分かった。

2次元の場合も同様のことが成り立つが、実はより便利に、複素関数論が適用できる、という話を以下で紹介する。

(一方、2次元の Laplace 方程式の境界値問題は、複素関数論のあちこちで登場する。直接的に正則関数が登場しないが、複素関数論の項目の一つと考えるべきかもしれない。)

3.13 2次元流 3.13.1 渦度, 渦無しの流れ

速度場 \mathbf{v} が $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} u(x, y, t) \\ v(x, y, t) \\ 0 \end{pmatrix}$ の形をしているとき、流れは2次元の、**2次元流**であるという(このとき、 $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = 0$, \mathbf{v} の z 成分 = 0. 逆は必ずしも真ではない。)。

このとき渦度は

$$\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

そこで、2次元ベクトル場 $\mathbf{v}(x, y, t) = \begin{pmatrix} u(x, y, t) \\ v(x, y, t) \end{pmatrix}$ に対して、

$$\text{rot } \mathbf{v} := \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

と定め、これを \mathbf{v} の**渦度**と呼ぶことがある。この講義でも採用する。

3.13.1 渦度, 渦無しの流れ

2次元流についても、3次元流とほぼ同じことが成立する。

命題 8.1 (2次元流における渦なし流)

2次元の速度場 \mathbf{v} について

- ① \mathbf{v} のポテンシャルが存在すれば渦なし ($\text{rot } \mathbf{v} = 0$)。
- ② 渦なし ($\text{rot } \mathbf{v} = 0$) ならば、任意の単連結領域で \mathbf{v} のポテンシャルが存在する。
- ③ \mathbf{v} のポテンシャル ϕ が存在するとき、 $\Delta\phi = \text{div } \mathbf{v}$. 特に非圧縮流ならば $\Delta\phi = 0$.

ただし $\text{rot } \mathbf{v} := \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ とする。

証明は3次元の場合と同じなので省略する。

3.13.2 非圧縮流と流れ関数 (1) 流れ関数と流線

2次元流の速度場 $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ に対して、

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = u$$

を満たす ψ が存在するとき、 ψ を \mathbf{v} の **流れ関数** (stream function) と呼ぶ。

定義 8.2 (流線)

曲線が速度場 \mathbf{v} の **流線** (stream line) とは、曲線上の各点で、曲線の接ベクトルが \mathbf{v} と平行であることをいう。

注意 流れ関数の等高線 ($\psi = \text{const.}$ で定まる曲線) のことを流線と定義することもあるが、ここでしたように、流線は流れ関数を用いずに定義することもできる。そうしておいて、流れ関数が存在する場合は、その等高線が流線になる、と論じることを選んだ。)

3.13.2 非圧縮流と流れ関数 (2) 流れ関数の等高線は流線

命題 8.3

流れ関数が存在するとき、その等高線は流線である。

証明.

$\nabla\psi \cdot \mathbf{v} = \psi_x u + \psi_y v = -vu + uv = 0$ であるから $\nabla\psi \perp \mathbf{v}$. $\nabla\psi$ は流れ関数 ψ の等高線の法線ベクトルであるから、それが \mathbf{v} と直交することは、流れ関数の等高線の接線ベクトルが \mathbf{v} と平行であることを意味する。ゆえに流れ関数の等高線は流線である。 \square

より具体的に、 $\nabla\psi$ を $-\frac{\pi}{2}$ 回転すると \mathbf{v} に等しい。実際

$$\begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} \nabla\psi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_x \\ \psi_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_y \\ -\psi_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{v}.$$

3.13.2 非圧縮流と流れ関数 (3) 非圧縮性と流れ関数

命題 8.4 (非圧縮性と流れ関数)

2次元の速度場 \mathbf{v} について

- ① \mathbf{v} の流れ関数が存在すれば非圧縮 ($\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$)。
- ② 非圧縮 ($\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$) ならば、任意の単連結領域で \mathbf{v} の流れ関数が存在する。
- ③ \mathbf{v} の流れ関数 ψ が存在するとき、 $\Delta\psi = -\operatorname{rot} \mathbf{v}$. 特に渦なしならば $\Delta\psi = 0$.
ただし $\operatorname{rot} \mathbf{v} := \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ とする。 渦無しと速度ポテンシャルの関係に似ている。

証明 (1) $\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0$.

(2) $\operatorname{rot} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}(-v) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ であるから、任意の単連結領域で $\psi(\mathbf{x}) := \int_{C_{\mathbf{x}}} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} \cdot d\mathbf{r}$ が well-defined であり、 $\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v$, $\frac{\partial \psi}{\partial y} = u$. ゆえに ψ は \mathbf{v} の流れ関数である。

(3) $\operatorname{rot} \mathbf{v} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\Delta\psi$. □

3.13.2 非圧縮流と流れ関数 (4) 流れ関数の意味

(流れ関数の意味を説明するが、最初に学ぶときは、とりあえず飛ばしても良い。)

考えている領域 Ω 内に定点 \mathbf{a} を選び、 \mathbf{a} から $\mathbf{x} \in \Omega$ に至る Ω 内の曲線 C_x を取ると、 $\psi(\mathbf{x}) := \int_{C_x} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} \cdot d\mathbf{r}$ が流れ関数となった。弧長パラメータ s を用いると、 $\mathbf{t} := \begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(s) \end{pmatrix}$ は単位接線ベクトルとなり

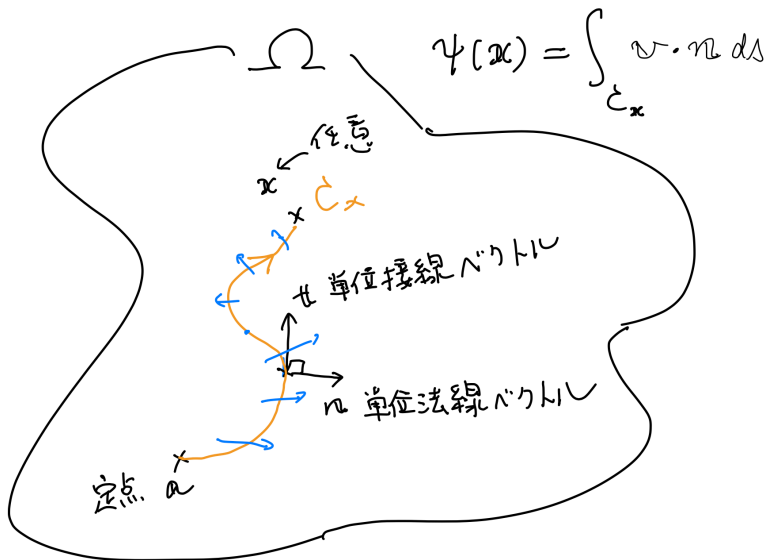
$$\psi(\mathbf{x}) = \int_{C_x} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_x} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} \cdot \mathbf{t} ds = \int_{C_x} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds.$$

ただし

$$\mathbf{n} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{t} = \begin{pmatrix} y'(s) \\ -x'(s) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

(\mathbf{n} は \mathbf{t} を $-\pi/2$ 回転したもので、単位法線ベクトルである。)

$\psi(\mathbf{x})$ はいわゆる**流束積分** (flux integral) である。すなわち、 C_x を横切り、 \mathbf{n} の側に単位時間に流れる流体の量 (2次元なので面積) である。



3.13.3 2次元単連結領域における非圧縮ポテンシャル流

今日の議論を振り返る。3.12, 3.13 の定理を並べる (再提示)。

命題 8.5 (渦なし流と速度ポテンシャル)

2次元の速度場 \mathbf{v} について

- ① \mathbf{v} のポテンシャルが存在すれば渦なし ($\text{rot } \mathbf{v} = 0$)。
- ② 渦なし ($\text{rot } \mathbf{v} = 0$) ならば、任意の単連結領域で \mathbf{v} のポテンシャルが存在する。
- ③ \mathbf{v} のポテンシャル ϕ が存在するとき、 $\Delta\phi = \text{div } \mathbf{v}$ 。特に非圧縮流ならば $\Delta\phi = 0$ 。ただし $\text{rot } \mathbf{v} := \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ とする。

命題 8.6 (非圧縮流と流れ関数)

2次元の速度場 \mathbf{v} について

- ① \mathbf{v} の流れ関数が存在すれば非圧縮 ($\text{div } \mathbf{v} = 0$)。
- ② 非圧縮 ($\text{div } \mathbf{v} = 0$) ならば、任意の単連結領域で \mathbf{v} の流れ関数が存在する。
- ③ \mathbf{v} の流れ関数 ψ が存在するとき、 $\Delta\psi = -\text{rot } \mathbf{v}$ 。特に渦なしならば $\Delta\psi = 0$ 。ただし $\text{rot } \mathbf{v} := \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ とする。

3.14 2次元非圧縮渦なし流と関数論との関係

2次元で、非圧縮と渦なしの両方を仮定するとどうなるか。ある ϕ, ψ が存在して

$$\nabla\phi = \begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{pmatrix} = \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \psi_y \\ -\psi_x \end{pmatrix}.$$

このとき

$$f(x + iy) := \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

とおき、 f を \mathbf{v} の複素速度ポテンシャルと呼ぶ。

実は f は正則関数である。実際

$$\phi_x = u = \psi_y, \quad \phi_y = v = -\psi_x$$

であるから、Cauchy-Riemann 方程式が成り立つ。また

$$f' = u - iv \quad (\text{微分すると速度が得られる}).$$

実際、 $f' = \phi_x + i\psi_x = u + i(-v) = u - iv$.

ϕ と ψ は調和関数である。正則関数の常識であるが、次の式も見ておこう。

$$\Delta\phi = \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \Delta\psi = -\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0.$$

複素速度ポテンシャル f が存在する場合は、流束積分は複素積分で計算できる:

$$(1) \quad \int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds = \operatorname{Im} \int_C f'(z) \, dz.$$

実際、

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds = -v \, dx + u \, dy = \psi_x \, dx + \psi_y \, dy,$$

$$\begin{aligned} f'(z) \, dz &= (\phi_x + i\psi_x)(dx + i \, dy) \\ &= (\phi_x \, dx - \psi_x \, dy) + i(\psi_x \, dx + \phi_x \, dy) \\ &= (\phi_x \, dx + \phi_y \, dy) + i(\psi_x \, dx + \psi_y \, dy) \end{aligned}$$

であるから

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds = \operatorname{Im} f'(z) \, dz.$$

複素関数の可視化 (流体の話から離れて)

複素関数 f の実部・虚部をそれぞれ u, v として、それらが微分可能なとき、 f が正則であるためには

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

という Cauchy-Riemann 方程式を満たすことが必要十分である、という定理があった。

ゆえに任意の正則関数 f について

$$\text{grad } u \cdot \text{grad } v = u_x v_x + u_y v_y = u_x(-u_y) + u_y u_x = 0$$

であるから、**実部 u , 虚部 v の等高線は互いに直交している。**

(復習: $\text{grad } \phi$ は ϕ の等高線 ($\phi(x, y) = c$) の法線ベクトルである。)

複素関数の有名なテキストである Ahlfors [3] では、初等関数の実部・虚部の等高線がどうなっているか、紙数を惜しまずに具体例をあげて説明してある。

(小さな文字で流体の話に戻すと 等ポテンシャル線と流線は直交する、ということ。)

3.15 簡単な関数の表す流れ 3.15.1 一様流

1次関数 $f(z) = cz$, $c = p - iq$ (ただし $p, q \in \mathbb{R}$) のとき、

$$f(x + yi) = (p - iq)(x + yi) = px + qy + i(-qx + py),$$

$$u - iv = f' = c = p - iq.$$

復習: 正則関数 f の定める速度場の成分を u, v とすると、 $f' = u - iv$.

ゆえに f を複素速度ポテンシャルとする流れの速度場は

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

これは定数である。そのため (場所によらないため) **一様流** と呼ばれる。

1次関数は一様流の速度ポテンシャルである。

このとき、速度ポテンシャルと流れ関数は

$$\phi(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy) = px + qy, \quad \psi(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy) = -qx + py.$$

3.15.1 一様流 続き

等ポテンシャル線 ($\phi = \text{const.}$) も、流線 ($\psi = \text{const.}$) も平行直線群であり、それらは互いに直交する。

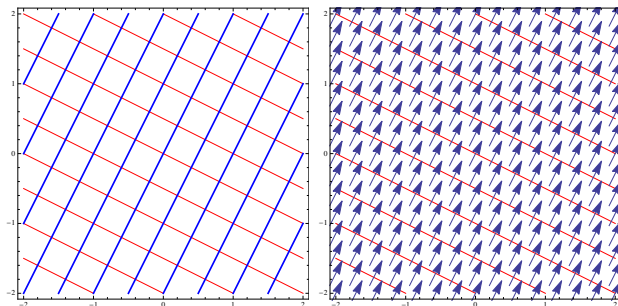


図 1: 一様流の等ポテンシャル線 (赤)、流線 (青) と速度ベクトル

3.15.2 湧き出しと吸い込み

$m \in \mathbb{R}$, $f(z) = m \log z$ ($z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$). この f は多価関数なので、少し気持ちが悪いが、分枝は定数差しかないので、微分すると一価である。

$z = re^{i\theta}$ ($r \geq 0$, $\theta \in \mathbb{R}$) とすると

$$f(re^{i\theta}) = m(\log r + i\theta) = m \log r + im\theta,$$

$$u - iv = f'(z) = \frac{m}{z} = \frac{m}{re^{i\theta}} = \frac{m}{r}(\cos \theta - i \sin \theta).$$

ゆえに f を複素速度ポテンシャルとする流れの速度場は

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m}{r} \cos \theta \\ \frac{m}{r} \sin \theta \end{pmatrix}.$$

\mathbf{v} の方向は、 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$ と同じ。 $m > 0$ ならば向きも同じ (湧き出し)、
 $m < 0$ ならば向きは逆 (吸い込み)。

\mathbf{v} の大きさ $|\mathbf{v}|$ は $\frac{|m|}{r}$ で、原点からの距離に反比例している。

速度ポテンシャルと流れ関数は

$$\phi(x, y) = \operatorname{Re} f(z) = m \log r, \quad \psi(x, y) = \operatorname{Im} f(z) = m\theta.$$

3.15.2 湧き出しと吸い込み (続き)

等ポテンシャル線 ($\phi = m \log r = \text{定数}$) は原点を中心とする同心円群、流線 ($\psi = m\theta = \text{定数}$) は原点を始点とする半直線群である (もちろん互いに直交)。

原点を正の向きに一周する閉曲線 C に対し、 C から外に湧き出る流量は

$$\int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds = \text{Im} \int_C f'(z) \, dz = \text{Im} \int_C \frac{m}{z} \, dz = 2\pi m \quad (C \text{ によらない}).$$

この流れは、 $m > 0$ ならば原点においた**湧き出し** (source), $m < 0$ ならば原点に置いた**吸い込み** (sink) と呼ばれる。

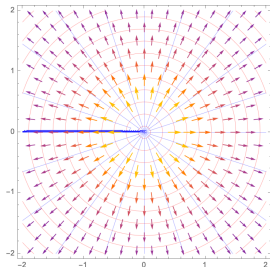


図 2: 湧き出しの等ポテンシャル線、流線、速度場

3.15.3 渦糸 (点渦)

$\kappa \in \mathbb{R}$, $f(z) = i\kappa \log z$ ($z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$).

$z = re^{i\theta}$ ($r \geq 0$, $\theta \in \mathbb{R}$) とすると

$$f(re^{i\theta}) = i\kappa(\log r + i\theta) = -\kappa\theta + i\kappa \log r,$$

$$u - iv = f'(z) = \frac{i\kappa}{z} = \frac{i\kappa}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) = \frac{\kappa}{r}(\sin\theta + i\cos\theta).$$

ゆえに f を複素速度ポテンシャルとする流れの速度場は

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{\kappa}{r} \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

\mathbf{v} の方向は $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を $-\frac{\pi}{2}$ 回転した方向である。 $\kappa > 0$ ならば向きも同じ (時計回り)、 $\kappa < 0$ ならば向きは逆 (反時計回り)。

\mathbf{v} の大きさは $\frac{|\kappa|}{r}$ で、原点からの距離に反比例する。

速度ポテンシャルと流れ関数は

$$\phi(x, y) = \operatorname{Re} f(z) = -\kappa\theta, \quad \psi(x, y) = \operatorname{Im} f(z) = \kappa \log r.$$

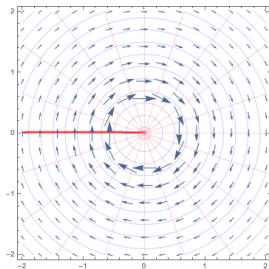
3.15.3 渦糸 (点渦) 続き

等ポテンシャル線 ($\phi = -\kappa\theta = \text{定数}$) は原点を始点とする半直線で、流線 ($\psi = \kappa \log r = \text{定数}$) は原点を中心とする円である。

この流れは、原点に置かれた うずいと 渦糸 (vortex filament, vortex string) または てんうず 点渦 (point vortex) と呼ばれる。

渦度は $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 全体で 0. (渦度が原点に集中していて他は渦なし、と考えるべきかもしれない。)

問 $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ を確かめよ (f は一価正則でなく、前回の説明の範疇には収まらないので、念のため確認)。



3.15.4 Mathematica で可視化する

以上の単純な場合は、紙とペンでも十分理解可能であるが、この辺で文明の利器を。

コマンドをコピーできると便利なので、この部分の資料は WWW に置く。

「簡単な正則関数を複素速度ポテンシャルとする流れの可視化」
https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2/fluid_mathematica/

3.14 流れの合成

2つの2次元渦なし非圧縮流があり、速度場をそれぞれ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, また複素速度ポテンシャルを f_1, f_2 とする。このとき $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ を速度場とする流れは、やはり2次元渦なし非圧縮流であり、その複素速度ポテンシャルは $f_1 + f_2$ である。

実際、

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}_1 = \operatorname{rot} \mathbf{v}_2 = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_1 = \operatorname{div} \mathbf{v}_2 = 0$$

であれば

$$\operatorname{rot} (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = 0,$$

$$\operatorname{div} (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = 0,$$

$$\begin{aligned} (f_1 + f_2)' &= f_1' + f_2' = (u_1 - iv_1) + (u_2 - iv_2) \\ &= (u_1 + u_2) - i(v_1 + v_2). \end{aligned}$$

流れを合成するには、複素速度ポテンシャルを足せば良い

3.14.1 一様流と湧き出しの重ね合わせ — ある無限物体をよぎる流れ

$U, m > 0$ とする。一様流 $f_1(z) = Uz$ と、湧き出し $f_2(z) = m \log z$ の重ね合わせの複素速度ポテンシャルは

$$\begin{aligned} f(z) &= f_1(z) + f_2(z) \\ &= Uz + m \log z = Ur \cos \theta + m \log r + i(Ur \sin \theta + m\theta). \end{aligned}$$

ゆえに流れ関数は

$$\psi = Ur \sin \theta + m\theta.$$

$\theta = 0$ とすると $\psi = 0$, また $\theta = \pi$ とすると $\psi = m\pi$ であるから、これらは ψ の等高線である。ゆえに実軸 (原点を除く) は流線である。

また $\theta \in (0, 2\pi)$, $\theta \neq \pi$ とすると

$$(2) \quad \psi = m\pi \Leftrightarrow Ur \sin \theta + m\theta = m\pi \Leftrightarrow r = \frac{m(\pi - \theta)}{U \sin \theta} \Leftrightarrow r = \frac{m}{U} \cdot \frac{\varphi}{\sin \varphi}.$$

ただし $\varphi := \pi - \theta$.

$\theta \in (0, \pi)$ ($\varphi \in (0, \pi)$) と $\theta \in (\pi, 2\pi)$ ($\varphi \in (-\pi, 0)$) で分けて考える。

3.14.1 一様流と湧き出しの重ね合わせ — ある無限物体をよぎる流れ

これは右方向に無限に伸びる U 字型の曲線である¹。流体が非粘性流体の場合、これを壁面とする物体を (U 字形領域に) 入れても、流れは影響は受けない。ゆえに、この流れは、その形の物体をよぎる流れを表している。

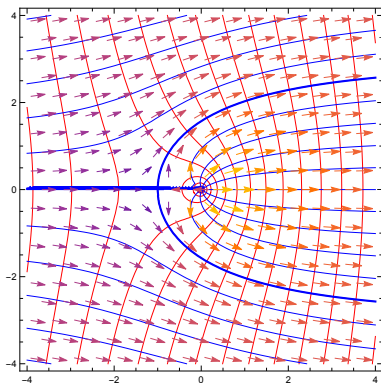


図 4: 一様流と湧き出しの重ね合わせ (太線は $\psi = \pm m\pi$)

3.14.2 同じ強さの湧き出し・吸い込みの対

$z = a$ に置いた強さ m の湧き出し、 $z = -a$ に置いた強さ m の吸い込みを重ね合わせる。

$$f(z) := m \log(z - a) - m \log(z + a) = m \log \frac{z - a}{z + a}.$$

(途中で分枝が気になるが、右辺は $\mathbb{C} \setminus [-a, a]$ で一価正則である！)

分子、分母の z を、それぞれ $z = a + r_1 e^{i\theta_1}$, $z = -a + r_2 e^{i\theta_2}$ で置き換えると

$$f(z) = m((\log r_1 + i\theta_1) - (\log r_2 + i\theta_2)) = m \log \frac{r_1}{r_2} + im(\theta_1 - \theta_2).$$

等ポテンシャル線の方程式は $\frac{r_1}{r_2} = \text{定数}$. アポロニウスの円を表す。

流線の方程式は $\Theta := \theta_1 - \theta_2 = \text{定数}$. Θ は $a, -a$ から点 z を見込む角であるので、2点 $\pm a$ を結ぶ線分を弦とする円弧である (円周角の定理の逆による)。

3.14.2 同じ強さの湧き出し・吸い込みの対 (続き)

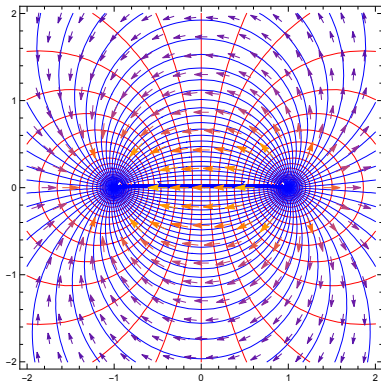


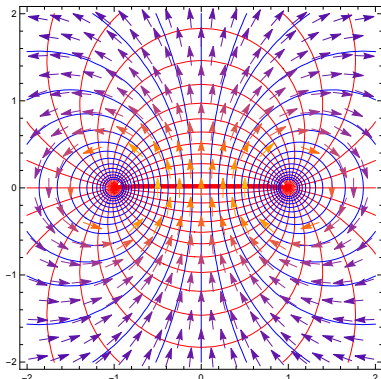
図 5: 同じ強さの湧き出しと吸い込みの重ね合わせ

3.14.3 同じ強さ反対向きの渦の対

等しい強さを持ち、回転の向きが反対の点渦を $z = a, -a$ に置いて重ね合わせた流れの複素速度ポテンシャルは

$$f(z) := i\kappa \log \frac{z - a}{z + a}.$$

等ポテンシャル線、流線の方程式はそれぞれ $\theta_1 - \theta_2 = \text{定数}$, $\frac{r_1}{r_2} = \text{定数}$ で、どちらも円を表す。



3.14.4 ランキンの卵形 (Rankine body)

$U, m, a > 0$ とする。一様流 $f_1(z) = Uz$, $-a$ に置いた湧き出し $f_2(z) = m \log(z + a)$, a に置いた吸い込み $f_3(z) = -m \log(z - a)$ を重ね合わせる。

$$f(z) := Uz + m \log(z + a) - m \log(z - a) = Uz + m \log \frac{z + a}{z - a}.$$

流れ関数は

$$\psi = Uy - m(\theta_1 - \theta_2) = Uy - m \tan^{-1} \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}.$$

実軸 $y = 0$ では、 $\psi = 0$ であるから、実軸は1つの流線である。また

$$\psi = 0 \Leftrightarrow y = \frac{m}{U} \tan^{-1} \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}.$$

この方程式は卵形の曲線を表す。これを **Rankine の卵形** (the Rankine body) と呼ぶ。

3.14.4 ランキンの卵形 (Rankine body) 続き

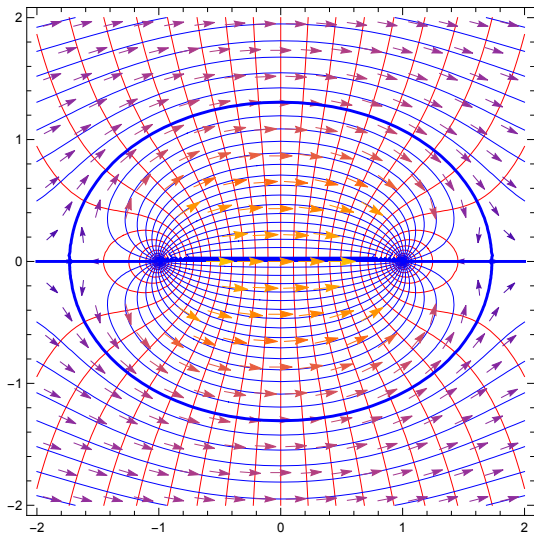


図 7: Rankine の卵形 (同じ強さの湧き出し・吸い込みと一様流の重ね合わせ)

3.14.5 2重湧き出し (doublet)

同じ強さの湧き出し・吸い込み対の流れの複素速度ポテンシャルは

$$f(z) = m \log(z - a) - m \log(z + a).$$

$\mu > 0$ を取り、 $2am = \mu$ という関係式を保ったままで、 $a \rightarrow 0$ とした極限を考えよう。

$$\begin{aligned} f(z) &= m \log(z - a) - m \log(z + a) = -\mu \frac{\log(z + a) - \log(z - a)}{2a} \\ &\rightarrow F(z) := -\mu \frac{d}{dz} \log z = -\frac{\mu}{z} = \frac{-\mu x}{x^2 + y^2} + i \frac{\mu y}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

F を複素速度ポテンシャルとする流れを**二重湧き出し** (doublet) と呼ぶ。

3.14.5 2重湧き出し (doublet) (続き)

$F(z) := -\frac{\mu}{z}$ の定める流れの等ポテンシャル線は、実軸上に中心を持ち原点を通る円、または虚軸 (原点を除く) である。

一方、流線は、虚軸上に中心を持ち原点を通る円または実軸 (原点を除く) である。

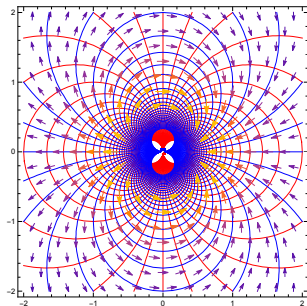


図 8: 二重湧き出し (同じ強さの湧き出し・吸い込みの極限)

3.14.6 円柱を過ぎる一様流

ランキンの卵形で $2am = \mu$ (正定数) として $a \rightarrow 0$ としてみよう (二重湧き出しと一様流との重ね合わせ、とも言える)。

$$f(z) = Uz + \frac{\mu}{z} = U \left(z + \frac{R^2}{z} \right), \quad R := \sqrt{\mu/U}.$$

$$f(re^{i\theta}) = U \left(r \cos \theta + i \sin \theta + \frac{R^2}{r} (\cos \theta - i \sin \theta) \right)$$

であるから、速度ポテンシャル ϕ と流れ関数 ψ は

$$\phi = U \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \theta, \quad \psi = U \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \sin \theta.$$

特に円周 $r = R$ 上で $\psi = 0$ であるから、 $r = R$ は流線である。

3.14.6 円柱を過ぎる一様流 (続き)

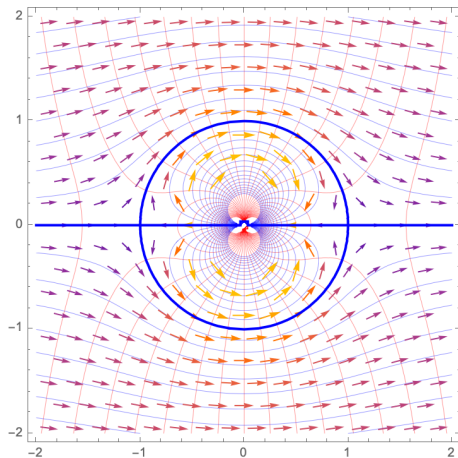


図 9: 円柱を過ぎる一様流

完全流体の一様流の中に円柱を入れると

- [1] 今井功：複素解析と流体力学, 日本評論社 (1981/10/20, 1989/4/1).
- [2] 今井功：等角写像とその応用, 岩波書店 (2013/9/10).
- [3] Ahlfors, K.: *Complex Analysis*, McGraw Hill (1953), 笠原 乾吉 訳, 複素解析, 現代数学社 (1982).