応用複素関数レポート課題 1

桂田 祐史

2023 年 5 月 23 日, 2023 年 5 月 30 日

3 つの分野から 1 つずつ選んで解答する。

番号の後に A とある問題は比較的簡単、B とある問題は少し手強い (難しい、あるいは作業量が多い)。B は A の 1.5 倍の得点とします。

ネットの情報が役に立つかもしれませんが、当たり外れが大きいので、書籍を調べることを勧めます。あるいはネットでアクセスするにしても、明治大学が契約している丸善 eBook (https://elib.maruzen.co.jp/) の詳細検索で、「関数論」,「複素関数」,「複素解析」などのキーワードで検索すると、色々ヒットします。

1 定積分計算への留数定理の応用

1A 留数を用いて定積分を計算する方法の中で、複素対数関数を利用するものがある。例えば、分母の次数が分子の次数より 2 以上大きな有理関数 f ($[0,+\infty)$ では分母は 0 にならないとする) に対して

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = -\sum_{c\in\mathbb{C}\setminus[0,+\infty)} \operatorname{Res}\left(f(z)\log z; c\right). \qquad (\spadesuit)$$

ただし右辺に現れる log は偏角の範囲を $[0,2\pi)$ に選んだ複素対数関数である ($z\in\mathbb{C}\setminus[0,+\infty)$ を $z=re^{i\theta}$ ($r>0$, $\theta\in[0,2\pi)$) と極形式で表示した場合に、$\log z=\log r+i\theta$)。

この公式を用いて $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+x+1}$ の値を求めよ。

(ヒント: 公式 ($\spadesuit$) の導出は講義ノート ([1]) で説明してあるが、この問題自体は公式を使うだけなので、難しくない。)

2B 次のいずれかの積分を留数を用いて計算せよ。(1) a を正の数とするとき $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{(x+a)^3}dx$

(2) p,q は自然数で $q<p$ とするとき、$\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{q-1}}{1+x^p}dx$

(ヒント: (1) 関数 $f(z)=\dfrac{(\log z)^2}{(z+a)^3}$ を、問題 1A の公式を導くのと同じ積分路に沿って積分する。(2) 有名な問題。扇形 $\left\{z=re^{i\theta}\;\middle|\;0\le r\le R,\ 0\le\theta\le\frac{2\pi}{p}\right\}$ の周に沿って積分する。)

2 級数の和計算への留数定理の応用

3A 留数を用いて $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4}$ の和を求めよ。

(ヒント: 授業で計算した $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ の真似をする。)

4A $a > 0,\ 0 \le x < 2\pi$ のとき $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n^2 + a^2}$ を求めよ。
(ヒント: 定理 3.1 (https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2/AC03_0425.pdf) (3) を用いる。)

3 無限遠点と Riemann 面, 1 次分数変換

(準備中)

5B Riemann 面の定義を調べて、Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ が Riemann 面であることを示せ。
(ヒントというか、幾何学の多様体に興味がある人向け。)

6A (1) $\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への関数について、微分可能とはどういうことか、条件を述べよ (f が z で微分可能というのを、z や $f(z)$ が ∞ の場合にどう定義するかを書く)。(2) 1 次分数変換 $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ は任意の $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ で微分可能であることを示せ。

7A (1) $a, b \in \mathbb{C},\ a \ne 0,\ b \ne 0$ とする。a と b がベクトルと考えて同じ向きであるためには、$a\bar{b} > 0$ が必要十分であることを示せ。(2) C は $\widehat{\mathbb{C}}$ の円、$z, z' \in \widehat{\mathbb{C}}$ とする。z と z' が C に関して鏡像の位置にある条件を式で表し、その根拠を説明せよ。(3) 1 次分数変換の鏡像の原理「C は $\widehat{\mathbb{C}}$ の円、z と z' は C に関して互いに鏡像の位置にある 2 点, f は 1 次分数変換とするとき、$f(z)$ と $f(z')$ は $f(C)$ に関して鏡像の位置にある」を証明せよ。
(ヒント: 授業中にあらすじを説明したことで、「細部を詰めなさい」という問題。)

8B $D_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, $z_0 \in D_1$ とする。

(1) Schwarz の補題という有名な定理を書け (この後で必要になる)。

(2) 1 次分数変換 φ で $\varphi(D_1) = D_1$, $\varphi(z_0) = 0$ を満たすものは、

$$(\heartsuit) \qquad \varphi(z) = \varepsilon \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}, \quad \varepsilon \in \mathbb{C}, \quad |\varepsilon| = 1$$

に限ることを示せ。

(3) 双正則な $\varphi\colon D_1 \to D_1$ で、$\varphi(z_0) = 0$ を満たすものは、1 次分数変換である (したがって ($\heartsuit$) の形をしている) ことを示せ。

9A 上半平面 H を単位円版 D_1 にうつす 1 次分数変換 φ は

$$\varphi(z) = \varepsilon \frac{z - \beta}{z - \overline{\beta}}, \quad \varepsilon, \beta \in \mathbb{C}, \quad |\varepsilon| = 1, \quad \operatorname{Im} \beta > 0$$

と表せることを示せ。
(ヒント: Cayley 変換と単位円版 D_1 の等角写像の一般形 (問題 8B の ($\heartsuit$)) を用いる。)

参考文献

[1] 桂田祐史：続 複素関数論,「複素関数」講義ノートの続き. https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2/zoku-complex-function.pdf (2015〜).