

応用複素関数 第7回

～ 流体力学への応用 (2) ～

かつらだ まさし
桂田 祐史

2023年5月30日

目次

- ① 本日の内容・連絡事項
- ② 流体力学への複素関数の応用
 - 流体の運動の表現 何を求めれば良いか
 - 物質微分
 - 応力
 - 完全流体, 粘性流体, 非圧縮流体
- ③ 参考文献

- レポート課題1を出します。Ⓕ切は7月7日(金) 22:00。提出は Oh-o! Meiji を用いる。
- 流体力学の方程式を紹介する。講義ノートとして桂田 [1], 参考書として今井 [2] をあげておく。
- しばしばベクトル解析を用いる。ベクトル解析を未修の人は適当な機会に学ぶことを勧めるが、とりあえず桂田 [3], [4] 紹介しておく。

3.2 流体の運動の表現 何を求めれば良いか

流体の状態は、ふつう次のものを求めることで定まる。ただし $\mathbf{x} = (x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$ は位置, t は時刻を表す。

- 速度 (velocity) $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$
(\mathbf{v} の代わりに \mathbf{u} という字を使うことも多い。)
- 圧力 (pressure) $p(\mathbf{x}, t)$
- 密度 (density) $\rho(\mathbf{x}, t)$
- 温度 (temperature) 今回は考えない。

問 水と空気のおおよその密度は？ (この PDF の最後に答えがある。)

解答 水は 1 ml で 1 g とすれば、 $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ である。

空気については、高校の化学の知識で、1 mol は 22.4 l であること、80% が窒素 (分子量 28)、20% が酸素 (分子量 32) であることを用いると、 $\rho = 1.3 \text{ kg/m}^3$ となる。

3.2 流体力学の方程式 (1) 連続の方程式

質量が保存されることから、一般に次式が成立する。これを**連続の方程式** (continuity equation) と呼ぶ。

$$(1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0.$$

証明 (あらすじ) 流体内の任意の領域 V にしめる流体の質量の時間変化率を考えると、質量保存則から

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \int_V \rho \, d\mathbf{x} = - \int_{\partial V} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma.$$

ただし \mathbf{n} は ∂V の点における外向き単位法線ベクトルで、 $d\sigma$ は面積要素、 ∂V は V の境界である。

(2) の右辺の意味や、次の Gauss の発散定理については、例えば桂田 [3], [4] を見よ。

左辺に積分記号下の微分 (微分と積分の順序交換)、右辺に Gauss の発散定理を使うと

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\mathbf{x} = - \int_V \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \, d\mathbf{x}.$$

V は任意であるから

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad \square$$

3.3 物質微分 (1) 定義

積の微分法から $\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = \operatorname{grad} \rho \cdot \mathbf{v} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v}$ が成り立つので、連続の方程式は次のように書ける。

$$(3) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

物質微分 (material derivative, Lagrange derivative) と呼ばれる作用素 $\frac{D}{Dt}$ を次式で定義する:

$$(4) \quad \frac{D}{Dt} := \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial t} + v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

これを使うと (3) は次のように表せる。

$$(5) \quad \frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

3.3 物質微分 (2) 意味

流体の流れに沿って運動するある粒子 (観測者) の位置を $\mathbf{x}(t)$ とする。
すなわち

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}(t), t)$$

が成り立つ。このとき、任意の関数 $f(\mathbf{x}, t)$ に対して

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}f(\mathbf{x}(t), t) &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}(t), t)x'_j(t) + \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}(t), t) \\ &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}(t), t)v_j(\mathbf{x}(t), t) + \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}(t), t) = \frac{Df}{Dt}(\mathbf{x}(t), t)\end{aligned}$$

が成り立つ。

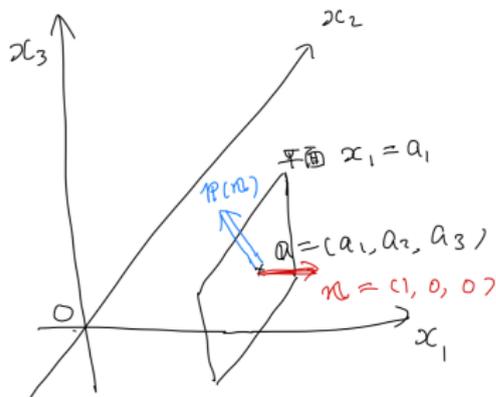
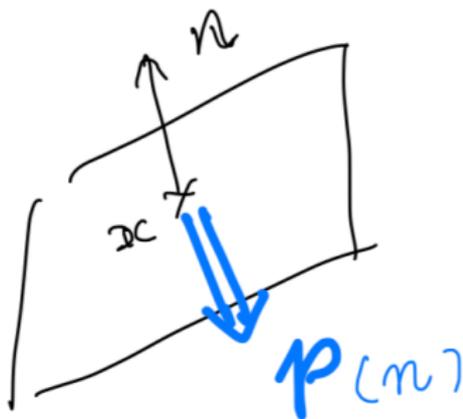
注意 流体粒子の速度は、位置 \mathbf{x} と時刻 t が分かれば $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ で与えられるが、その加速度は $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ でなく、 $\frac{D\mathbf{v}}{Dt}$ である。よく考えてみよう。

3.4 応力 (1) Cauchy の応力原理, 応力の定義

流体の運動を考えるため、Cauchy は次の仮定をおいた。

流体が接触することで及ぼす力は面積に比例する。面積あたりの力は、位置 x , 時刻 t , 面の向き (普通は外向き単位法線ベクトル n で指定する) で定まる (**Cauchy の応力原理**)。

この面積あたりの力を**応力** (stress) と呼ぶ。



3.4 応力 (2) 応力テンソル

しばらく、 $\mathbf{x} = \mathbf{a}$, $t = \tau$ と固定し、応力 \mathbf{p} を \mathbf{n} の関数と考える: $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{n})$.

点 \mathbf{a} を通る平面 $x_i = a_i$ を通して、正の側が負の側におよびす力を $\begin{pmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \\ p_{i3} \end{pmatrix}$ とおく。これは $\mathbf{p}(\mathbf{e}_i)$ である。

$P := (p_{ij}) = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$ を応力テンソル (stress tensor) と呼ぶ。

次のことが成り立つ (証明は省略)。

- P は対称である: $P^T = P$ つまり $p_{ij} = p_{ji}$.
- $\mathbf{p}(\mathbf{n}) = P^T \mathbf{n}$.

次式は覚えておくこと。

$$(6) \quad \mathbf{p}(\mathbf{n}) = P\mathbf{n}.$$

3.4 応力 (3) 応力テンソルの具体形

適当な仮定をおくと、応力テンソルの具体形が定まる。

Stokes (1819–1903) は、流体についての仮定を整理して **Stokes の流体公理** にまとめた (一様、等方、 $E = 0$ のとき $P = -pI$ 等々)。それから

$$P = \alpha I + \beta E + \gamma E^2$$

が導かれる。ここで I は単位テンソル、 E は

$$(7) \quad E = (e_{ij}), \quad e_{ij} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

で定められ、**歪み (速度) テンソル** (strain rate tensor)、変形速度テンソルと呼ばれる。

さらに **Newton 流体の仮定** (P は E の 1 次式) をおくと、

$$(8) \quad P = (-p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v}) I + 2\mu E$$

を得る (岡本・中村 [5])。ここで λ, μ は非負定数、 $p = p(x, t)$ はスカラー関数である。

3.5 完全流体, 粘性流体, 非圧縮流体 (1)

以下では、Newton 流体の仮定を満たす流体を考える。

μ は**粘性率 (粘性係数, 粘度, viscosity)** と呼ばれる非負定数である。

- $\mu = 0$ である流体を**完全流体 (perfect fluid)**, あるいは**非粘性流体 (inviscid fluid)** と呼ぶ。
- $\mu > 0$ である流体を**粘性流体 (viscous fluid)** と呼ぶ。

一方、 $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ を満たす流体を**非圧縮流体**と呼ぶ。一般に連続の方程式 $\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ が成り立つので、この条件は次の方程式と同値である。

$$(9) \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (\text{非圧縮条件の方程式})$$

(\because 連続の方程式のうち $\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ という形のものを見れば分かる。)

非圧縮条件を満たす Newton 流体の応力テンソルは、次式を満たす。

$$(10) \quad P = -pl + 2\mu E.$$

2023/5/30 の授業はここまで。

3.5 完全流体, 粘性流体, 非圧縮流体 (2) 有名な場合

流体が静止している場合 ($\mathbf{v} = 0$) や、完全流体 ($\mu = 0$) においては ($\mu E = 0$ であるので)

$$P = -pl = - \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}.$$

ゆえに

$$\mathbf{p}(\mathbf{n}) = P\mathbf{n} = -p\mathbf{n}.$$

応力は面に垂直 ($\mathbf{p} \parallel \mathbf{n}$)、押される向きで (外向き単位法線ベクトル \mathbf{n} と逆向き)、大きさは $p = p(\mathbf{x}, t)$ で \mathbf{n} にはよらない。

学校の理科で、止まっている水の力学として聞いたことがあるかもしれない。

- [1] 桂田祐史：複素関数と流体力学,
<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2/intro-fluid.pdf> (2015～).
- [2] 今井功：複素解析と流体力学, 日本評論社 (1981/10/20, 1989/4/1).
- [3] 桂田祐史：多変数の微分積分学 2 講義ノート 第 2 部,
<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/tahensuu2/tahensuu2-p2.pdf>
(内容はベクトル解析) (2006～).
- [4] 桂田祐史：ベクトル解析早見表, [https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/
applied-complex-function-2021/vector_analysis.pdf](https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/applied-complex-function-2021/vector_analysis.pdf) (2021/5/31).
- [5] 岡本久, 中村周：関数解析, 岩波書店 (2006/1/26, 2016/11/10 (POD 版)), 岩波講座
現代数学の基礎 (1996～1999) の分冊を単行本化したもの.