

# 応用複素関数 第6回

～ Riemann 球面, 1 次分数変換 (3), 流体力学への応用 (1) ～

かつらだ まさし  
桂田 祐史

2023 年 5 月 23 日

# 目次

- 1 本日の内容・連絡事項
- 2 連絡事項&本日の内容
- 3 Riemann 球面, 1 次分数変換 (続き)
  - 1 次分数変換の鏡像の原理
  - 1 次分数変換による領域の等角写像
- 4 流体力学への複素関数の応用
  - はじめに
  - 流体の運動の表現 何を求めれば良いか
- 5 参考文献

# 本日の内容・連絡事項

- 今日の前半 (1 次分数変換) までの範囲のレポート課題を出す。ㄨ切は7月上旬。
  - 今日の後半からコンピューター実習を伴う範囲に入る。レポート課題を3つ出す予定。ㄨ切は課題を出してから3週間後。教育実習の人は事前に相談して下さい。
  - 関数論と流体力学についての資料 (PDF にはリンクを張ってある)
    - 「複素関数と流体力学」桂田 [1]…講義ノートのようなもの。
    - 「ベクトル解析早見表」桂田 [2]…定義式や定理。
- 参考書としては、今井「複素解析と流体力学」 [3] をあげておく。

# 連絡事項 & 本日の内容

- 今回から、しばらく (3 回程度) 流体力学への応用の話をする。
- 今日は、流体力学で出て来る諸概念と、有名な方程式 (連続の方程式、非圧縮条件、Navier-Stokes 方程式、Euler 方程式、Stokes 方程式) の紹介をする (駆け足)。
- 次回以降、以下のものを使う可能性がある。
  - Mathematica  
Mac で動くかチェックすること。ライセンスが切れて動かない場合は、桂田に相談すること (アクティベーション・キーの再発行ができる)。
  - FreeFem++  
これについてはインストール方法を紹介する資料を準備し、授業で実演する。
  - C コンパイラー  
macOS をアップデートして C コンパイラーが動かなくなっている人が時々いる。その場合、Xcode またはコマンドラインツールの再インストールをする。

## 2.10 1次分数変換の鏡像の原理 (1) 鏡像の位置

$\hat{C}$  の円は1次分数変換で  $\hat{C}$  の円に写ることを示したが、円上にない点についても、注目すべき性質が成り立つ。

### 定義 7.1 (円に関して鏡像の位置)

$C$  は  $\hat{C}$  の円であり、 $z, z' \in \hat{C}$  とする。 $z$  と  $z'$  が  $C$  に関して互いに**鏡像の位置**にある ( $z$  と  $z'$  が  $C$  に関して対称である) とは、次の (a), (b) のいずれかが成り立つことをいう。

- Ⓐ  $C$  が  $\mathbb{C}$  の直線であり、 $z$  と  $z'$  が  $C$  に関して対称の位置にある。
- Ⓑ  $C$  が  $\mathbb{C}$  の円であり、 $z$  と  $z'$  が円  $C$  の中心  $c$  から発する一本の半直線上にあって、しかも  $|z - c||z' - c| = r^2$  ( $r$  は円  $C$  の半径) を満たす。円の中心  $c$  と  $\infty$  とはその円に関して鏡像の位置にあるとする。

## 2.10 1次分数変換の鏡像の原理 (2) 鏡像の原理

### 命題 7.2 (1次分数変換の鏡像の原理)

$C$  は  $\hat{C}$  の円、 $z$  と  $z'$  は  $C$  に関して互いに鏡像の位置にある2点、 $f$  は1次分数変換とすると、 $f(z)$  と  $f(z')$  は  $f(C)$  に関して互いに鏡像の位置にある。

#### 証明のあらすじ

色々な方法があるが、素朴な計算で証明してみよう。 $f$  が平行移動  $T_d(z) = z+d$ 、定数倍  $M_a(z) = az$  ( $a \neq 0$ )、反転  $R(z) = \frac{1}{z}$  について確かめれば良い (任意の1次分数変換は、それらの合成として表せるから)。

平行移動、定数倍については直観的にも明らかであろう。

反転  $R(z) = \frac{1}{z}$  のときは、少々計算が必要であるが、次のことを使うと見通しが良い。

**ヒント**  $z, z'$  が  $c$  から発する一本の半直線上にあり、かつ  $|z-c||z'-c| = r^2$  を満たすためには、 $(z-c)(\overline{z'}-\bar{c}) = r^2$  を満たすことが必要十分である。

以下各自に任せる。

**領域の等角写像**という概念を紹介する。これについては後で詳しく説明するが、有名かつ重要な話を3つ“先行上映”する。

- ① Riemann の写像定理
- ② 単位円盤の等角写像
- ③ 上半平面の等角写像

(ii), (iii) が1次分数変換となることが、1次分数変換の重要性を示している。(i) の証明中でも、1次分数変換は基本的ツールとして使われる。

## 2.11 1次分数変換による領域の等角写像 写像定理

単位円盤を  $D_1$  とおく:  $D_1 := D(0; 1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ .

正則関数が正則な逆写像を持つとき、<sup>そうせいそく</sup>**双正則** という。

$\hat{\mathbb{C}}$  の領域  $\Omega$  に対して、 $\varphi: \Omega \rightarrow D_1$  が双正則であるとき、 $\varphi$  を  **$\Omega$  の等角写像**あるいは **$\Omega$  の写像関数**とよぶ。

### 定理 7.3 (Riemann の写像定理)

$\hat{\mathbb{C}}$  の領域  $\Omega$  が単連結で、 $\Omega \neq \mathbb{C}$ ,  $\Omega \neq \hat{\mathbb{C}}$  ならば、 $\Omega$  の等角写像が存在する。

$\Omega$  は  $\mathbb{C}$  の領域,  $z_0 \in \Omega$  とするとき、 $\Omega$  の等角写像で、次の条件 (しばしば**正規化条件**とよばれる) を満たすものは一意的である。

$$(1) \quad \varphi(z_0) = 0, \quad \varphi'(z_0) > 0.$$

“簡単な” 領域の等角写像が1次分数変換になることが結構多い。

(等角写像が1次分数変換そのものでなくても、その構成に1次分数変換が使われるものはとても多い)。

次は非常に有名な定理である。

### 定理 7.4 (単位円盤の等角写像)

$\Omega = D_1$ ,  $z_0 \in \Omega$  とする。双正則な  $\varphi: \Omega \rightarrow D_1$  で、 $\varphi(z_0) = 0$  を満たすものは

$$(2) \quad \varphi(z) := \varepsilon \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}, \quad \varepsilon \in \mathbb{C}, \quad |\varepsilon| = 1.$$

( $\varepsilon = e^{i\theta}$  ( $\theta \in \mathbb{R}$ ) と書ける。つまり回転だけの自由度しか残らない。)  $\varphi'(z_0) > 0$  という条件を課すと、 $\varepsilon = 1$  と定まる。

この事実の証明を期末レポート課題候補にする。(2) の  $\varphi$  が条件を満たすこと、条件を満たす1次分数変換が(2)に限られることは初等的に導ける。

双正則という仮定から、 $\varphi$  が1次分数変換に限られる、というところに **Schwarzの補題** という有名な定理 (証明はそれほどむつかしくない) が必要になる。

## 例 7.5 (上半平面の等角写像)

$$H := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$$

を**上半平面**とよぶ。

$$(3) \quad \varphi(z) := \frac{z - i}{z + i}$$

は  $H$  の等角写像である。

**略証** 1次分数変換は一般に双正則であるから、 $\varphi(H) = D_1$  を確かめれば良い。それは、計算で得られる  $1 - |\varphi(z)|^2 = \frac{4 \operatorname{Im} z}{|z + i|^2}$  から分かる。  $\square$

この  $\varphi$  は **ケーリー**  
**Cayley変換**とよばれる。

$\varphi$  は実軸  $\mathbb{R}$  ( $H$  の境界) を単位円周  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  ( $D_1$  の境界) に写す。

Hilbert 空間における自己共役作用素と unitary 変換とが、Cayley 変換で移り合うという有名な事実がある。

上半平面を単位円板に写す1次分数変換の一般形は

$$(4) \quad w = \alpha \frac{z - \beta}{z - \bar{\beta}}, \quad |\alpha| = 1, \quad \text{Im } \beta > 0.$$

$\beta = i, \alpha = 1$  のとき、いわゆる Cayley 変換となる。

実直線  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  を自分自身に写す 1 次分数変換は？

# 落穂拾い (1)

$\widehat{\mathbb{C}}$  の相異なる 3 点  $\alpha, \beta, \gamma$  に対して、

$$(z, \alpha, \beta, \gamma) := \frac{\alpha - \gamma}{\alpha - \beta} \cdot \frac{z - \beta}{z - \gamma}$$

とおき、 $z, \alpha, \beta, \gamma$  の**非調和比** (cross ratio) とよぶ。

これはつまり、 $\alpha, \beta, \gamma$  をそれぞれ  $1, 0, \infty$  に写す一次分数変換による  $z$  の像である。

1 次分数変換は非調和比を変えない。すなわち、任意の一次分数変換  $f$  に対して

$$(z, \alpha, \beta, \gamma) = (f(z), f(\alpha), f(\beta), f(\gamma))$$

が成り立つ。

(証明)  $f(\alpha), f(\beta), f(\gamma)$  を  $1, 0, \infty$  に写す 1 次分数変換を  $\varphi$  とすると、

$$\varphi(w) = (w, f(\alpha), f(\beta), f(\gamma)) \quad (w \in \widehat{\mathbb{C}}).$$

$\varphi \circ f$  は  $\alpha, \beta, \gamma$  を  $1, 0, \infty$  に写す 1 次分数変換であるから、

$$\varphi(f(z)) = \varphi \circ f(z) = (z, \alpha, \beta, \gamma) \quad (z \in \widehat{\mathbb{C}}).$$

ゆえに

$$(f(z), f(\alpha), f(\beta), f(\gamma)) = (z, \alpha, \beta, \gamma) \quad (z \in \widehat{\mathbb{C}}). \quad \square$$

# 3 流体力学への複素関数の応用

## 3.1 はじめに

**流体 (fluid)** とは、液体, 気体のように定まった形を持たず、「流れる」ものを理想化したものである。

(Cf. 質点, 質点系, 剛体, 弾性体, …)

- 流体のかかわる現象は非常に多く、応用上重要である。
- 流体は、圧縮性と粘性の有無で分類される。
- 流体の運動の決定については、数学的には解の存在・一意性すら未解決問題である。(ほとんどが非線形問題になり取り扱いが難しい。)

次のことが言える。

2次元の非圧縮流体の渦なしの流れ = 正則関数

この意味を理解して、その場合に应用できるようになることが、応用複素関数の(1つの)目標である。

## 3.1 はじめに (続き)

流体力学の定番本として、今井 [4], 巽 [5] をあげておく。関数論の応用については、今井 [3] がある。

必要な数学として、関数論、ベクトル解析、偏微分方程式の基本的な知識をあげておく (一応この授業で説明)。

## 3.2 流体の運動の表現 何を求めれば良いか

流体の状態は、ふつう次のものを求めることで定まる。ただし  $\mathbf{x} = (x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$  は位置,  $t$  は時刻を表す。

- 速度 (velocity)  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$   
( $\mathbf{v}$  の代わりに  $\mathbf{u}$  という字を使うことも多い。)
- 圧力 (pressure)  $p(\mathbf{x}, t)$
- 密度 (density)  $\rho(\mathbf{x}, t)$
- 温度 (temperature) 今回は考えない。

**問** 水と空気のおおよその密度は？ (この PDF の最後に答えがある。)

2023/5/23 の授業はここまでです。

# 参考文献

- [1] 桂田祐史：複素関数と流体力学,  
<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2/intro-fluid.pdf>  
(2015～).
- [2] 桂田祐史：ベクトル解析早見表, [https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/applied-complex-function-2021/vector\\_analysis.pdf](https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/applied-complex-function-2021/vector_analysis.pdf)  
(2021/5/31).
- [3] 今井功：複素解析と流体力学, 日本評論社 (1981/10/20, 1989/4/1).
- [4] 今井功：流体力学 前編, 裳華房 (1973), 流体力学の基本的文献。後編は書かれなかった。
- [5] たつみともまさ 翼 友正：流体力学, 培風館 (1982).