応用複素関数 第6回

～ Riemann 球面, 1 次分数変換 (3), 流体力学への応用 (1) ～

かつらだ　まさし
桂田 祐史

2023 年 5 月 23 日

目次

本日の内容・連絡事項

- 今日の前半 (1 次分数変換) までの範囲のレポート課題を出す。〆切は 7 月上旬。
- 今日の後半からコンピューター実習を伴う範囲に入る。レポート課題を 3 つ出す予定。〆切は課題を出してから 3 週間後。教育実習の人は事前に相談して下さい。
- 関数論と流体力学についての資料 (PDF にはリンクを張ってある)
  - 「複素関数と流体力学」桂田 [1]…講義ノートのようなもの。
  - 「ベクトル解析早見表」 桂田 [2]…定義式や定理。

  参考書としては、今井「複素解析と流体力学」 [3] をあげておく。

連絡事項&本日の内容

- 今回から、しばらく (3 回程度) 流体力学への応用の話をする。

連絡事項＆本日の内容

- 今回から、しばらく (3 回程度) 流体力学への応用の話をする。
- 今日は、流体力学で出て来る諸概念と、有名な方程式 (連続の方程式、非圧縮条件、Navier-Stokes 方程式、Euler 方程式、Stokes 方程式) の紹介をする (駆け足)。

連絡事項&本日の内容

- 今回から、しばらく (3 回程度) 流体力学への応用の話をする。
- 今日は、流体力学で出て来る諸概念と、有名な方程式 (連続の方程式、非圧縮条件、Navier-Stokes 方程式、Euler 方程式、Stokes 方程式) の紹介をする (駆け足)。
- 次回以降、以下のものを使う可能性がある。
    - Mathematica
      Mac で動くかチェックすること。ライセンスが切れて動かない場合は、桂田に相談すること (アクティベーション・キーの再発行ができる)。
    - FreeFem++
      これについてはインストール方法を紹介する資料を準備し、授業で実演する。
    - C コンパイラー
      macOS をアップデートして C コンパイラーが動かなくなっている人が時々いる。その場合、Xcode またはコマンドラインツールの再インストールをする。

2.10 1 次分数変換の鏡像の原理 (1) 鏡像の位置

$\widehat{\mathbb{C}}$ の円は 1 次分数変換で $\widehat{\mathbb{C}}$ の円に写ることを示したが、円上にない点についても、注目すべき性質が成り立つ。

2.10 1次分数変換の鏡像の原理 (1) 鏡像の位置

$\widehat{\mathbb{C}}$ の円は1次分数変換で $\widehat{\mathbb{C}}$ の円に写ることを示したが、円上にない点についても、注目すべき性質が成り立つ。

定義 7.1 (円に関して鏡像の位置)

C は $\widehat{\mathbb{C}}$ の円であり、$z, z' \in \widehat{\mathbb{C}}$ とする。z と z' が C に関して互いに**鏡像の位置**にある (z と z' が C に関して対称である) とは，次の (a), (b) のいずれかが成り立つことをいう。

(a) C が $\mathbb{C}$ の直線であり、z と z' が C に関して対称の位置にある。

(b) C が $\mathbb{C}$ の円であり、z と z' が円 C の中心 c から発する一本の半直線上にあって、しかも $|z - c||z' - c| = r^2$ (r は円 C の半径) を満たす。円の中心 c と ∞ とはその円に関して鏡像の位置にあるとする。

2.10 1次分数変換の鏡像の原理 (1) 鏡像の位置

$\widehat{\mathbb{C}}$ の円は 1 次分数変換で $\widehat{\mathbb{C}}$ の円に写ることを示したが、円上にない点についても、注目すべき性質が成り立つ。

定義 7.1 (円に関して鏡像の位置)

C は $\widehat{\mathbb{C}}$ の円であり、$z, z' \in \widehat{\mathbb{C}}$ とする。z と z' が C に関して互いに**鏡像の位置**にある (z と z' が C に関して対称である) とは，次の (a), (b) のいずれかが成り立つことをいう。

(a) C が $\mathbb{C}$ の直線であり、z と z' が C に関して対称の位置にある。

(b) C が $\mathbb{C}$ の円であり、z と z' が円 C の中心 c から発する一本の半直線上にあって、しかも $|z-c||z'-c| = r^2$ (r は円 C の半径) を満たす。円の中心 c と ∞ とはその円に関して鏡像の位置にあるとする。

2.10 1 次分数変換の鏡像の原理 (2) 鏡像の原理

命題 7.2 (1 次分数変換の鏡像の原理)

C は $\widehat{\mathbb{C}}$ の円、z と z' は C に関して互いに鏡像の位置にある 2 点、f は 1 次分数変換とするとき、$f(z)$ と $f(z')$ は $f(C)$ に関して互いに鏡像の位置にある。

命題 7.2 (1 次分数変換の鏡像の原理)

C は $\widehat{\mathbb{C}}$ の円、z と z' は C に関して互いに鏡像の位置にある 2 点、f は 1 次分数変換とするとき、$f(z)$ と $f(z')$ は $f(C)$ に関して互いに鏡像の位置にある。

証明のあらすじ

色々な方法があるが､素朴な計算で証明してみよう。f が平行移動 $T_d(z) = z+d$, 定数倍 $M_a(z) = az$ $(a \neq 0)$, 反転 $R(z) = \frac{1}{z}$ について確かめれば良い (任意の 1 次分数変換は、それらの合成として表せるから)。

2.10 1次分数変換の鏡像の原理 (2) 鏡像の原理

命題 7.2 (1次分数変換の鏡像の原理)

C は $\widehat{\mathbb{C}}$ の円、z と z' は C に関して互いに鏡像の位置にある2点、f は1次分数変換とするとき、$f(z)$ と $f(z')$ は $f(C)$ に関して互いに鏡像の位置にある。

証明のあらすじ

色々な方法があるが、素朴な計算で証明してみよう。f が平行移動 $T_d(z) = z+d$, 定数倍 $M_a(z) = az$ $(a \neq 0)$, 反転 $R(z) = \frac{1}{z}$ について確かめれば良い (任意の1次分数変換は、それらの合成として表せるから)。

平行移動、定数倍については直観的にも明らかであろう。

2.10 1次分数変換の鏡像の原理 (2) 鏡像の原理

命題 7.2 (1次分数変換の鏡像の原理)

C は $\widehat{\mathbb{C}}$ の円、z と z' は C に関して互いに鏡像の位置にある2点、f は1次分数変換とするとき、$f(z)$ と $f(z')$ は $f(C)$ に関して互いに鏡像の位置にある。

証明のあらすじ

色々な方法があるが､素朴な計算で証明してみよう。f が平行移動 $T_d(z) = z+d$, 定数倍 $M_a(z) = az$ $(a \neq 0)$, 反転 $R(z) = \frac{1}{z}$ について確かめれば良い (任意の1次分数変換は、それらの合成として表せるから)。

平行移動、定数倍については直観的にも明らかであろう。

反転 $R(z) = \frac{1}{z}$ のときは、少々計算が必要であるが、次のことを使うと見通しが良い。

ヒント z, z' が c から発する一本の半直線上にあり、かつ $|z-c||z'-c'| = r^2$ を満たすためには、$(z-c)(\overline{z'}-\overline{c}) = r^2$ を満たすことが必要十分である。

以下各自に任せる。

領域の等角写像という概念を紹介する。これについては後で詳しく説明するが、有名かつ重要な話を 3 つ “先行上映” する。

- (i) Riemann の写像定理
- (ii) 単位円盤の等角写像
- (iii) 上半平面の等角写像

(ii), (iii) が 1 次分数変換となることが、1 次分数変換の重要性を示している。(i) の証明中でも、1 次分数変換は基本的ツールとして使われる。

単位円盤を D_1 とおく: $D_1 := D(0;1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

正則関数が正則な逆写像を持つとき、**双正則**(そうせいそく)という。

$\widehat{\mathbb{C}}$ の領域 Ω に対して、$\varphi \colon \Omega \to D_1$ が双正則であるとき、φ を **Ω の等角写像**あるいは **Ω の写像関数**とよぶ。

定理 7.3 (Riemann の写像定理)

$\widehat{\mathbb{C}}$ の領域 Ω が単連結で、$\Omega \neq \mathbb{C}$, $\Omega \neq \widehat{\mathbb{C}}$ ならば、Ω の等角写像が存在する。

Ω は $\mathbb{C}$ の領域, $z_0 \in \Omega$ とするとき、Ω の等角写像で、次の条件 (しばしば**正規化条件**とよばれる) を満たすものは一意的である。

(1) $$\varphi(z_0) = 0, \quad \varphi'(z_0) > 0.$$

"簡単な" 領域の等角写像が 1 次分数変換になることが結構多い。

(等角写像が 1 次分数変換そのものでなくても、その構成に 1 次分数変換が使われるものはとても多い)。

次は非常に有名な定理である。

定理 7.4 (単位円盤の等角写像)

$\Omega = D_1$, $z_0 \in \Omega$ とする。双正則な $\varphi\colon \Omega \to D_1$ で、$\varphi(z_0) = 0$ を満たすものは

$$\varphi(z) := \varepsilon \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}, \quad \varepsilon \in \mathbb{C}, \quad |\varepsilon| = 1. \tag{2}$$

($\varepsilon = e^{i\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R}$) とも書ける。つまり回転だけの自由度しか残らない。)

$\varphi'(z_0) > 0$ という条件を課すと、$\varepsilon = 1$ と定まる。

次は非常に有名な定理である。

定理 7.4 (単位円盤の等角写像)

$\Omega = D_1$, $z_0 \in \Omega$ とする。双正則な $\varphi\colon \Omega \to D_1$ で、$\varphi(z_0) = 0$ を満たすものは

$$\varphi(z) := \varepsilon \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}, \quad \varepsilon \in \mathbb{C}, \quad |\varepsilon| = 1. \tag{2}$$

($\varepsilon = e^{i\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R}$) とも書ける。つまり回転だけの自由度しか残らない。)

$\varphi'(z_0) > 0$ という条件を課すと、$\varepsilon = 1$ と定まる。

この事実の証明を期末レポート課題候補にする。(2) の φ が条件を満たすこと、条件を満たす1次分数変換が (2) に限られることは初等的に導ける。

双正則という仮定から、φ が1次分数変換に限られる、というところに **Schwarz の補題**という有名な定理 (証明はそれほどむつかしくない) が必要になる。

例 7.5 (上半平面の等角写像)

$$H := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$$

を**上半平面**とよぶ。

(3) $$\varphi(z) := \frac{z-i}{z+i}$$

は H の等角写像である。

略証　1次分数変換は一般に双正則であるから、$\varphi(H) = D_1$ を確かめれば良い。それは、計算で得られる $1 - |\varphi(z)|^2 = \dfrac{4 \operatorname{Im} z}{|z+i|^2}$ から分かる。 □

この φ は**Cayley変換**(ケーリー)とよばれる。

φ は実軸 $\mathbb{R}$ (H の境界) を単位円周 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ (D_1 の境界) に写す。

例 7.5 (上半平面の等角写像)

$$H := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$$

を**上半平面**とよぶ。

(3)
$$\varphi(z) := \frac{z-i}{z+i}$$

は H の等角写像である。

略証　1次分数変換は一般に双正則であるから、$\varphi(H) = D_1$ を確かめれば良い。それは、計算で得られる $1 - |\varphi(z)|^2 = \dfrac{4 \operatorname{Im} z}{|z+i|^2}$ から分かる。　□

この φ は**Cayley変換**(ケーリー)とよばれる。

φ は実軸 $\mathbb{R}$ (H の境界) を単位円周 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ (D_1 の境界) に写す。

Hilbert 空間における自己共役作用素と unitary 変換とが、Cayley 変換で移り合うという有名な事実がある。

上半平面を単位円板に写す1次分数変換の一般形は

$$w = \alpha \frac{z-\beta}{z-\overline{\beta}}, \quad |\alpha| = 1, \quad \mathrm{Im}\,\beta > 0. \tag{4}$$

$\beta = i$, $\alpha = 1$ のとき、いわゆる Cayley 変換となる。

実直線 $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ を自分自身に写す 1 次分数変換は？

落穂拾い (1)

$\widehat{\mathbb{C}}$ の相異なる 3 点 α, β, γ に対して、

$$(z, \alpha, \beta, \gamma) := \frac{\alpha - \gamma}{\alpha - \beta} \cdot \frac{z - \beta}{z - \gamma}$$

とおき、z, α, β, γ の**非調和比** (cross ratio) とよぶ。

落穂拾い (1)

$\widehat{\mathbb{C}}$ の相異なる 3 点 α, β, γ に対して、

$$(z, \alpha, \beta, \gamma) := \frac{\alpha - \gamma}{\alpha - \beta} \cdot \frac{z - \beta}{z - \gamma}$$

とおき、z, α, β, γ の**非調和比** (cross ratio) とよぶ。

これはつまり、α, β, γ をそれぞれ 1, 0, ∞ に写す一次分数変換による z の像である。

落穂拾い (1)

$\widehat{\mathbb{C}}$ の相異なる 3 点 α, β, γ に対して、

$$(z, \alpha, \beta, \gamma) := \frac{\alpha - \gamma}{\alpha - \beta} \cdot \frac{z - \beta}{z - \gamma}$$

とおき、z, α, β, γ の**非調和比** (cross ratio) とよぶ。

これはつまり、α, β, γ をそれぞれ 1, 0, ∞ に写す一次分数変換による z の像である。

1 次分数変換は非調和比を変えない。すなわち、任意の一次分数変換 f に対して

$$(z, \alpha, \beta, \gamma) = (f(z), f(\alpha), f(\beta), f(\gamma))$$

が成り立つ。

落穂拾い (1)

$\widehat{\mathbb{C}}$ の相異なる 3 点 α, β, γ に対して、

$$(z,\alpha,\beta,\gamma) := \frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}\cdot\frac{z-\beta}{z-\gamma}$$

とおき、z, α, β, γ の**非調和比** (cross ratio) とよぶ。

これはつまり、α, β, γ をそれぞれ 1, 0, ∞ に写す一次分数変換による z の像である。

1 次分数変換は非調和比を変えない。すなわち、任意の一次分数変換 f に対して

$$(z,\alpha,\beta,\gamma) = (f(z), f(\alpha), f(\beta), f(\gamma))$$

が成り立つ。
(証明) $f(\alpha)$, $f(\beta)$, $f(\gamma)$ を 1, 0, ∞ に写す 1 次分数変換を φ とすると、

$$\varphi(w) = (w, f(\alpha), f(\beta), f(\gamma)) \quad (w\in\widehat{\mathbb{C}}).$$

$\varphi\circ f$ は α, β, γ を 1, 0, ∞ に写す 1 次分数変換であるから、

$$\varphi(f(z)) = \varphi\circ f(z) = (z,\alpha,\beta,\gamma) \quad (z\in\widehat{\mathbb{C}}).$$

ゆえに

$$(f(z), f(\alpha), f(\beta), g(\gamma)) = (z,\alpha,\beta,\gamma) \quad (z\in\widehat{\mathbb{C}}). \quad \square$$

流体 **(fluid)** とは、液体, 気体のように定まった形を持たず、「流れる」ものを理想化したものである。
(Cf. 質点, 質点系, 剛体, 弾性体, ⋯)

流体 (**fluid**) とは、液体, 気体のように定まった形を持たず、「流れる」ものを理想化したものである。
(Cf. 質点, 質点系, 剛体, 弾性体, $\cdots$)

3 流体力学への複素関数の応用

3.1 はじめに

流体 **(fluid)** とは、液体, 気体のように定まった形を持たず、「流れる」ものを理想化したものである。

(Cf. 質点, 質点系, 剛体, 弾性体, ⋯)

- 流体のかかわる現象は非常に多く、応用上重要である。

3 流体力学への複素関数の応用
3.1 はじめに

流体 (**fluid**) とは、液体, 気体のように定まった形を持たず、「流れる」ものを理想化したものである。

(Cf. 質点, 質点系, 剛体, 弾性体, $\cdots$)

- 流体のかかわる現象は非常に多く、応用上重要である。
- 流体は、圧縮性と粘性の有無で分類される。

流体 (**fluid**) とは、液体, 気体のように定まった形を持たず、「流れる」ものを理想化したものである。

(Cf. 質点, 質点系, 剛体, 弾性体, ⋯)

- 流体のかかわる現象は非常に多く、応用上重要である。
- 流体は、圧縮性と粘性の有無で分類される。
- 流体の運動の決定については、数学的には解の存在・一意性すら未解決問題である。(ほとんどが非線形問題になり取り扱いが難しい。)

流体 (**fluid**) とは、液体, 気体のように定まった形を持たず、「流れる」ものを理想化したものである。
(Cf. 質点, 質点系, 剛体, 弾性体, $\cdots$)

- 流体のかかわる現象は非常に多く、応用上重要である。
- 流体は、圧縮性と粘性の有無で分類される。
- 流体の運動の決定については、数学的には解の存在・一意性すら未解決問題である。(ほとんどが非線形問題になり取り扱いが難しい。)

次のことが言える。

2 次元の非圧縮流体の渦なしの流れ = 正則関数

この意味を理解して、その場合に応用できるようになることが、応用複素関数の (1 つの) 目標である。

3.1 はじめに (続き)

流体力学の定番本として、今井 [4], 巽 [5] をあげておく。関数論の応用については、今井 [3] がある。

必要な数学として、関数論、ベクトル解析、偏微分方程式の基本的な知識をあげておく (一応この授業で説明)。

流体の状態は、ふつう次のものを求めることで定まる。ただし $\boldsymbol{x} = (x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$ は位置, t は時刻を表す。

- 速度 (velocity) $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

  ($\boldsymbol{v}$ の代わりに $\boldsymbol{u}$ という字を使うことも多い。)
- 圧力 (pressure) $p(\boldsymbol{x}, t)$
- 密度 (density) $\rho(\boldsymbol{x}, t)$
- 温度 (temperature)　今回は考えない。

問　水と空気のおおよその密度は？ (この PDF の最後に答えがある。)

2023/5/23 の授業はここまでです。

参考文献

[1] 桂田祐史：複素関数と流体力学, https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2/intro-fluid.pdf (2015〜).

[2] 桂田祐史：ベクトル解析早見表, https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/applied-complex-function-2021/vector_analysis.pdf (2021/5/31).

[3] 今井功：複素解析と流体力学, 日本評論社 (1981/10/20, 1989/4/1).

[4] 今井功：流体力学 前編, 裳華房 (1973), 流体力学の基本的文献。後編は書かれなかった。

たつみともまさ
[5] 巽 友正：流体力学, 培風館 (1982).