

# 応用複素関数 第3回

～ 留数定理の応用 (3) 級数の和計算 (続き) ～

かつらだ まさし  
桂田 祐史

2023年4月25日

# 目次

- 1 連絡事項&本日の内容
- 2 留数定理の応用 (続き)
  - 級数の和 (続き)
    - $s_1, s_2, s_3$  の性質 (続き)
    - 和の公式とその証明
    - 級数の和の公式の適用例
    - Basel 問題  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$  (有名な問題への一つの解)
- 3 余談 1:  $\pi \cot(\pi z)$  の部分分数展開
- 4 余談 2: Euler による  $\sin$  の無限積展開
- 5 参考文献

- 留数定理の応用 級数の和の続きを解説する。

この §1.2 を通じて、次式で定める  $s_1, s_2, s_3$  を用いる。

$$s_1(z) := \frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \pi \operatorname{cosec}(\pi z), \quad s_2(z) := \frac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \pi \cot(\pi z),$$

$$s_3(z) := s_2(z) - i\pi \left( = \frac{2\pi i}{e^{2\pi iz} - 1} \right).$$

- $s_1, s_2$  の定義式の分母、分子は整関数 ( $\mathbb{C}$  全体で正則) である。
- $s_1, s_2$  の定義式の分母  $\sin(\pi z)$  の零点は  $n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) で、位数は 1. 実際

$$\sin(\pi z) = 0 \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) \pi z = n\pi \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) z = n.$$

さらに  $\frac{d}{dz}(\sin \pi z) \Big|_{z=n} = \pi \cos(n\pi) = (-1)^n \pi \neq 0$ .

- $s_1, s_2, s_3$  の極は  $n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) で、その位数は 1. 留数は

$$\operatorname{Res}(s_1; n) = \frac{\pi}{(\sin(\pi z))' \Big|_{z=n}} = (-1)^n,$$

$$\operatorname{Res}(s_3; n) = \operatorname{Res}(s_2; n) = \frac{\pi \cos(\pi z)}{(\sin(\pi z))' \Big|_{z=n}} = 1.$$

## 1.2.2 $s_1, s_2, s_3$ の性質 (続き) $s_j$ の定義・性質復習

以下の積分路  $\Gamma_N$  ( $N \in \mathbb{N}$ ) をしばしば用いる。

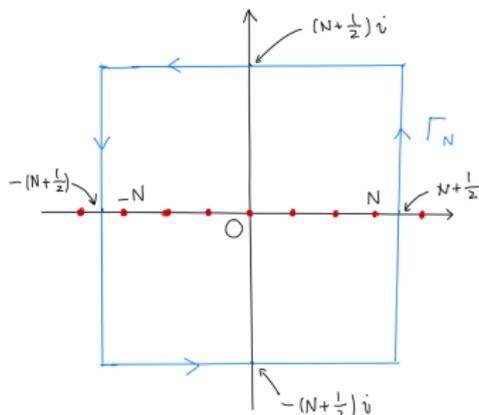


図 1: 1 辺  $2(N + 1/2)$  の正方形の周を正の向きに回る

- 曲線  $\Gamma_N$  上には  $s_1, s_2, s_3$  の極 (赤い点) はない。極との距離は  $1/2$ 。
  - $|s_j(z)| \leq 2\pi$  ( $j = 1, 2; z \in \Gamma_N^*$ ).
- (この不等式の証明に難しいところはないが、意外に面倒なのでここではサボる。講義ノート [1] §1.3 には書いてある。)

## 1.2.3 和の公式とその証明

### 定理 3.1 (級数の和の公式)

$P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$ ,  $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2$ ,  $(\forall n \in \mathbb{Z}) P(n) \neq 0$ ,  
 $f = \frac{Q}{P}$  とするとき

$$(1) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = - \sum_{c \text{ は } f \text{ の極}} \operatorname{Res}(f s_2; c),$$

$$(2) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n) = - \sum_{c \text{ は } f \text{ の極}} \operatorname{Res}(f s_1; c),$$

$$(3) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{in\theta} = - \sum_{c \text{ は } f \text{ の極}} \operatorname{Res}(f(z)s_3(z)e^{iz\theta}; c) \quad (\theta \in [0, 2\pi]).$$

((3) の左辺は Fourier 級数の形をしていることに注意。)

## 1.2.3 和の公式とその証明

$P(z)$ ,  $Q(z)$  についての仮定より

$$(\exists R \in \mathbb{R})(\exists C \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R) \quad P(z) \neq 0 \wedge |f(z)| \leq \frac{C}{|z|^2}.$$

以下  $N \in \mathbb{N}$  は  $N \geq R$  を満たすとする。 $P$  と  $Q$  は  $\mathbb{C}$  全体で正則であるので、 $f$  のすべての極は  $P$  の零点であり、それらは  $D(0; R)$  に含まれる。ゆえに  $\Gamma_N$  の内部に含まれる。留数定理によって

$$\int_{\Gamma_N} f(z)s_j(z) dz = 2\pi i \sum_{k=-N}^N \operatorname{Res}(fs_j; k) + 2\pi i \sum_{c \text{ は } f \text{ の極}} \operatorname{Res}(fs_j; c).$$

$k$  は  $s_j$  の 1 位の極であり、 $f$  は  $k$  のある近傍で正則であるから

$$\operatorname{Res}(fs_j; k) = f(k) \operatorname{Res}(s_j; k) = \begin{cases} (-1)^k f(k) & (j=1) \\ f(k) & (j=2). \end{cases}$$

後は  $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_N} f(z)s_j(z) dz = 0$  を示せば良い。 $|f(z)| \leq \frac{C}{N^2}$  ( $z \in \Gamma_N$ ) であるから

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_N} f(z)s_j(z) dz \right| &\leq \int_{\Gamma_N} |f(z)||s_j(z)||dz| \leq \frac{C}{N^2} \cdot 2\pi \int_{\Gamma_N} |dz| \\ &= \frac{2\pi C}{N^2} \cdot 4(2N+1) \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty). \quad \square \end{aligned}$$

## 1.2.4 級数の和の公式の適用例

### 例 3.2

$a > 0$  とするとき  $S := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}$  を求めよう。

関数  $f(z) := \frac{1}{z^2 + a^2}$  は、定理 3.1 の仮定を満たす。また  $f$  は偶関数であるから

$$2S + \frac{1}{a^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = - \sum_{c \text{ は } f \text{ の極}} \operatorname{Res}(f s_2; c).$$

$f$  の極  $c$  は  $c = \pm ia$  で位数は 1 であるから

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f s_2; c) &= s_2(c) \operatorname{Res}(f; c) = \pi \cot(\pm i\pi a) \cdot \frac{1}{2z} \Big|_{z=\pm ia} \\ &= \pi(-i \coth(\pm \pi a)) \cdot \frac{1}{\pm 2ia} = -\frac{\pi}{2a} \coth(\pi a). \end{aligned}$$

(ただし  $\cot(iz) = -i \coth z$  を用いた。これについては次ページで説明する。) ゆえに

$$2S + \frac{1}{a^2} = \frac{\pi}{a} \coth(\pi a). \quad \therefore \quad S = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{a} \coth(\pi a) - \frac{1}{a^2} \right). \quad \square$$

## メモ: 三角関数、双曲線関数の $iz$ での値

板書では必要なものだけを書くのか。

(必要になったとき自分で導くものだろうけれど、書いてあると安心。) よく知られた

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2},$$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \cot z = \frac{1}{\tan z}, \quad \coth z = \frac{1}{\tanh z}.$$

から容易に次が導ける。

$$\cosh(iz) = \cos z, \quad \sinh(iz) = i \sin z, \quad \tanh(iz) = i \tan z,$$

$$\cos(iz) = \cosh z, \quad \sin(iz) = i \sinh z, \quad \tan(iz) = i \tanh z,$$

$$\coth(iz) = -i \cot z, \quad \cot(iz) = -i \coth z.$$

## 1.2.5 Basel 問題 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (有名な問題への一つの解)

定理の仮定 ( $\forall n \in \mathbb{Z}$ )  $P(n) \neq 0$  が満たされない場合も、証明をたどると次が示せる。

$$(4) \quad \sum_{n \in \mathbb{Z} \wedge P(n) \neq 0} f(n) = - \sum_{c \text{ は } f \text{ の極}} \text{Res}(f s_2; c).$$

$f(z) = \frac{1}{z^2}$  の場合にこれを用いると

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z} \wedge n^2 \neq 0} f(n) = - \sum_{c \text{ は } f \text{ の極}} \text{Res}(f s_2; c) = - \text{Res}\left(\frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2}; 0\right).$$

ところで

$$\cot z = \frac{1}{z} - \frac{z}{3} - \frac{z^3}{45} + \cdots \quad (0 < |z| < \pi)$$

であるから (2022 年度複素関数第 26 回) に  $\tan$  の場合の求め方がある)

$$\frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2} = \frac{1}{z^3} - \frac{\pi^2}{3} \cdot \frac{1}{z} - \frac{\pi^4}{45} z + \cdots \quad (0 < |z| < 1).$$

$$\text{ゆえに } \text{Res}\left(\frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2}; 0\right) = -\frac{\pi^2}{3}. \quad \text{ゆえに } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

□

$\cot z$  の  $z = 0$  での Laurent 展開を数項だけ求める。

$$\begin{aligned}\cot z &= \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \dots}{z(1 - \frac{1}{3!}z^2 + \frac{1}{5}z^4 - \dots)} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1 - \frac{w}{2} + \frac{w^2}{4!} - \dots}{1 - \frac{1}{3!}w + \frac{1}{5}w^2 - \dots} \\ &= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n \quad (0 \text{ の近傍で正則なので展開できるはず}).\end{aligned}$$

分母を払うと

$$1 - \frac{w}{2!} + \frac{w^2}{4!} - \dots = \left(1 - \frac{1}{3!}w + \frac{1}{5!}w^2 - \dots\right) \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n.$$

右辺を展開して、係数を比較することで、 $a_0 = 1$ ,  $a_1 = -\frac{1}{3}$ ,  $a_2 = -\frac{1}{45}$ ,  $\dots$  と求まる。

Mathematica で検算: `Series[Cot[z], {z, 0, 10}]`

# 余談 1: $\pi \cot(\pi z)$ の部分分数展開

(授業時間が不足する可能性があるので、ここで紹介)

上で見たように、 $\pi \cot(\pi z)$  の極は  $n \in \mathbb{Z}$  であり、その位数は 1, 留数は 1 であるから、Laurent 展開の主部は  $\frac{1}{z-n}$  である。

和  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{z-n}$  は無限和なので収束が問題になるが、もし収束するならば、 $\pi \cot(\pi z) - \sum_n \frac{1}{z-n}$  は  $\mathbb{C}$  全体で正則になるはずである。

$$\text{実は (ある意味で) } \pi \cot(\pi z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{z-n}.$$

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z-n} = \lim_{N_1, N_2 \rightarrow \infty} \sum_{n=-N_1}^{N_2} \frac{1}{z-n}$  は収束しないが、 $N_1 = N_2 \rightarrow \infty$  とすると、 $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  で広義一様収束する。

# 余談 1: $\pi \cot(\pi z)$ の部分分数展開 (続き)

次式が成り立つ:

$$(5) \quad \pi \cot(\pi z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \frac{1}{z-n} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}).$$

$n \in \mathbb{Z}$  を 1 位の極に持ち、留数が 1 という関数として、(5) の右辺は考える最も簡単な関数であろうが、それが三角関数  $\pi \cot(\pi z)$  とぴったり一致するというのは、私にはとても不思議に感じられる。

**細かい注意** :  $\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z-(-n)} = \frac{2z}{z^2-n^2}$  である。 $\frac{1}{z-n} \sim -\frac{1}{n}$ ,  $\frac{2z}{z^2-n^2} \sim -\frac{2z}{n^2}$  となり、後者は  $n \rightarrow \pm\infty$  のとき速く減衰する。そのことから、(5) の右辺は、**広義一様収束**という良い性質を持つことが導ける。例えば項別微分も可能で、次式が導ける。

$$(6) \quad \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{(z-n)^2} + \frac{1}{(z+n)^2} \right).$$

証明は後でやるかもしれないが、省略するかもしれない (講義ノート [1] §2.4 に書いてある)。

次のような導出方法もある。

$a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  に対して

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n-a)^2} = -\operatorname{Res} \left( \frac{s_2(z)}{(z-a)^2} : a \right) = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi a)}.$$

$a$  を変数とみると

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}.$$

これを積分することで  $\pi \cot(\pi z)$  の部分分数展開を得る。

(この講義としては、この話の筋を採用するのが良いような気がする。)

## 余談2: Euler による $\sin$ の無限積展開

無限積

$$f(z) := \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) = \pi z \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

は  $\mathbb{C}$  で正則であることが (実は) 分かる。その対数微分を計算すると

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

この右辺は  $\pi \cot(\pi z)$  に他ならないので (1枚前のスライド)

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \pi \cot(\pi z) = \frac{(\sin(\pi z))'}{\sin \pi z}.$$

これから  $f(z) = \sin \pi z$  を導くことが出来る。ゆえに

$$(7) \quad \sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

この  $\sin \pi z$  の因数分解のような式を発見したのは Euler である。

(詳しくは講義ノート [1] §2.5 を見よ (例 2.26 … 番号がずれるかもしれない。))

- [1] 桂田祐史：続 複素関数論, 「複素関数」講義ノートの続き. <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2/zoku-complex-function.pdf> (2015～).