

# 応用複素関数 第2回

～ 留数定理の応用 (2) 定積分計算 (続き), 級数の和計算 ～

かつらだ まさし  
桂田 祐史

2023年4月18日

## 1 連絡事項, 本日の内容

## 2 続 留数定理の応用 (続き)

- 定積分計算への留数定理の応用 (続き)
  - 広義積分と主値積分
  - 実軸上に1位の極がある場合の主値積分の公式
  - Dirichlet 積分  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$  (解決)
- 級数の和
  - イントロ
  - $s_1, s_2, s_3$  の性質 (続き)

## 3 参考文献

## 連絡事項, 本日の内容

次の内容を講義します。

- 前回の話 ( $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ ) の続き。
- 留数定理の級数の和への応用 (講義ノート [1] の §1.3 の内容)

積分の定義には色々な流儀がある (大抵の場合に値は一致するけれど)。メジャーなものは次の2つ

### ① Riemann 積分

微積分での定番。“Riemann 和の極限として” 積分を定義する。

$\int_{\Omega} f(x) dx$  で  $\Omega$  と  $f$  が有界な場合に定義される。

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$  が有界とは  $(\exists R \in \mathbb{R}) (\forall x \in \Omega) |x| \leq R$ .

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  が有界とは  $(\exists M \in \mathbb{R}) (\forall x \in \Omega) |f(x)| \leq M$ .

### ② <sup>ルベーク</sup>Lebesgue積分

究極の積分とされる。関数解析では必須。現象数理学科では応用測度論で講義される。

Riemann 積分の場合に、 $\Omega$  や  $f$  が有界でない場合にどうするかを以下考察する。→ 広義積分、主値積分の登場

## 1.1.3 広義積分と主値積分

Riemann 積分で、 $\Omega$  や  $f$  が有界でない場合にするか？

→ **広義積分**として定義する。

積分範囲が有界でない場合、有界な範囲の積分の極限として定義する。例えば

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \lim_{R_1, R_2 \rightarrow \infty} \int_{-R_1}^{R_2} \frac{dx}{x^2 + 1} = \dots = \pi.$$

関数とその点の近傍で有界でないような点があれば、有界であるように穴を開けて、極限として定義する。例えば、 $\alpha > 0$  とするとき

$$\int_{-1}^2 \frac{dx}{|x|^\alpha} = \lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow +0} \left( \int_{-1}^{-\varepsilon_1} \frac{dx}{|x|^\alpha} + \int_{\varepsilon_2}^2 \frac{dx}{|x|^\alpha} \right) = \begin{cases} \infty & (\alpha \geq 1) \\ \frac{2^{1-\alpha} + 1}{1 - \alpha} & (0 < \alpha < 1) \end{cases}$$

対称 ( $R_1 = R_2$  とか  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ ) にやってはいけない。つまり

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left( \int_{-1}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^2 \right)$$

は、**広義積分の定義としては間違い** (関数が定符号 (つねに  $f \geq 0$  あるいはつねに  $f \leq 0$ ) であったり、積分が“絶対収束”である場合は、値が一致するけれど)。

## 1.1.3 広義積分と主値積分

$\int_{-1}^2 \frac{dx}{x}$  は広義積分可能でない。実際

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 \frac{dx}{x} &= \lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow +0} \left( \int_{-1}^{-\varepsilon_1} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon_2}^1 \frac{dx}{x} \right) = \lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow +0} \left( [\log |x|]_{-1}^{-\varepsilon_1} + [\log |x|]_{\varepsilon_2}^1 \right) \\ &= \lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow +0} \left( \log 2 + \log \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right) = \text{発散}\end{aligned}$$

(実際、 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$  のとき  $\log 2$ ,  $\varepsilon_2 = 3\varepsilon_1$  のとき  $\log 2 + \log 3$ ,  $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_1$  のとき  $2 \log 2$ ,  $\varepsilon_2 = \varepsilon_1^2$  のとき  $\log 2 + \log \varepsilon_1 \rightarrow -\infty$ )

しかし、左右対称の穴 ( $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ ) を開けた場合に意味があることもある。(実際  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  への応用がそう。) それを **Cauchy の主値積分** (principal value) とよび、p.v.  $\int_{-1}^2 \frac{dx}{x}$  と表す。

$$\text{p.v.} \int_{-1}^2 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left( \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{-\varepsilon}^2 \frac{dx}{x} \right) = \log 2.$$

一般の場合の主値積分の定義は書かないが、特異点を避ける「穴」を対称性があるように取るのが要点である。

## 1.1.4 実軸上に1位の極がある場合の主値積分の公式

次の定理は前回の授業でも提示した ((2) だけ提示したのだけ?)。

### 定理 1.9 (実軸上に1位の極がある場合の定積分の公式 — 再提示)

$P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$ ,  $f(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}$ ,  $P$  は  $\mathbb{R}$  上で高々1位の零点しか持たないとする。

①  $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2$  のとき

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } c > 0} \text{Res}(f; c) + \pi i \sum_{\text{Im } c = 0} \text{Res}(f; c).$$

②  $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 1$  のとき、任意の  $a > 0$  に対して

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iax} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } c > 0} \text{Res}(f(z) e^{iaz}; c) + \pi i \sum_{\text{Im } c = 0} \text{Res}(f(z) e^{iaz}; c)..$$

念のため: 「複素関数」では、 $P$  は  $\mathbb{R}$  上で零点を持たない ( $(\forall x \in \mathbb{R}) P(x) \neq 0$ )、という条件を課した定理を紹介した。1位の零点が存在する場合は、広義積分は存在しないが、主値積分は存在し、留数を用いて計算できる、ということである。

以下では、(1) だけ証明する (それで証明のアイディアは十分分かるから)。

# 定理 1.9 (1) の証明の概略 (part 1)

$f$  の極のうち、実軸上にあるものを  $c_1 < c_2 < \dots < c_N$  とする。

$\bar{D}(c_j; \varepsilon)$  に  $c_j$  以外の極が含まれないように  $\varepsilon > 0$  を十分小さく取る。

$R$  を十分大きく取り、 $f$  のすべての極が  $|z| < R$  の中にあり、 $-R < c_1 - \varepsilon$ ,  $c_N + \varepsilon < R$  を満たすとする。

半円弧  $C_{\varepsilon, j}$  ( $j = 1, \dots, N$ ) を

$$-C_{\varepsilon, j} : z = c_j + \varepsilon e^{i\theta} \quad (\theta \in [0, \pi])$$

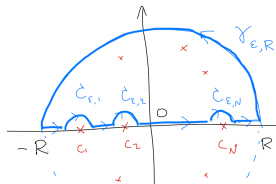
で定め (ふつうと逆向き, 時計回り)、

$$\Gamma_{\varepsilon, R} := [-R, c_1 - \varepsilon] + \sum_{j=1}^{N-1} (C_{\varepsilon, j} + [c_j + \varepsilon, c_{j+1} - \varepsilon]) + [c_N + \varepsilon, R],$$

$$C_R : z = R e^{i\theta} \quad (\theta \in [0, \pi]),$$

$$\gamma_{\varepsilon, R} := \Gamma_{\varepsilon, R} + C_R$$

により閉曲線  $\gamma_{\varepsilon, R}$  を定める。





# 定理 1.9 (1) の証明の概略 (part 2)

留数定理により、

$$\int_{\gamma_{\varepsilon,R}} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\text{Im } c > 0} \text{Res}(f; c).$$

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \int_{-R}^{c_1-\varepsilon} f(x) dx + \sum_{j=1}^N \left( \int_{C_{\varepsilon,j}} f(z) dz + \int_{c_j+\varepsilon}^{c_{j+1}-\varepsilon} f(x) dx \right) + \int_{c_N+\varepsilon}^R f(x) dx \\ &\quad + \int_{C_R} f(z) dz \\ &= \left( \int_{-R}^{c_1-\varepsilon} f(x) dx + \sum_{j=1}^N \int_{c_j+\varepsilon}^{c_{j+1}-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c_N+\varepsilon}^R f(x) dx \right) + \sum_{j=1}^N \int_{C_{\varepsilon,j}} f(z) dz \\ &\quad + \int_{C_R} f(z) dz. \end{aligned}$$

この右辺第 1 項は、 $\varepsilon \rightarrow +0$  のとき

$$\int_{-R}^{c_1-\varepsilon} f(x) dx + \sum_{j=1}^{N-1} \int_{c_j+\varepsilon}^{c_{j+1}-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c_N+\varepsilon}^R f(x) dx \rightarrow \text{p.v.} \int_{-R}^R f(x) dx.$$

# 定理 1.9 (1) の証明の概略 (part 3) じっくり考えよう

右辺第 2 項  $\sum_{j=1}^N \int_{C_{\varepsilon,j}} f(z) dz$  について考える。

$f$  の  $c_j$  における Laurent 展開の主部は  $\frac{A_j}{z - c_j}$  である。ただし  $A_j := \text{Res}(f; c_j)$ 。

$g_j$  を Laurent 展開の主部以外、つまり  $g_j(z) := f(z) - \frac{A_j}{z - c_j}$  とすると

$$\begin{aligned}\int_{C_{\varepsilon,j}} f(z) dz &= \int_{C_{\varepsilon,j}} \frac{A_j}{z - c_j} dz + \int_{C_{\varepsilon,j}} g_j(z) dz, \\ \int_{C_{\varepsilon,j}} \frac{A_j}{z - c_j} dz &= - \int_0^\pi \frac{A_j}{\varepsilon e^{i\theta}} \cdot i\varepsilon e^{i\theta} d\theta = -\pi i A_j.\end{aligned}$$

$g_j$  は  $c_j$  の十分小さな近傍で正則であるから、 $\varepsilon \rightarrow +0$  とするとき  $\int_{C_{\varepsilon,j}} g_j(z) dz \rightarrow 0$ 。

$$\text{ゆえに } \varepsilon \rightarrow +0 \text{ のとき } \sum_{j=1}^N \int_{C_{\varepsilon,j}} f(z) dz \rightarrow -\pi i \sum_{j=1}^N \text{Res}(f; c_j).$$

## 定理 1.9(1) の証明の概略 (part 4)

ゆえに

$$\text{p.v.} \int_{-R}^R f(x) dx - \pi i \sum_{j=1}^N \text{Res}(f; c_j) + \int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\text{Im } c > 0} \text{Res}(f; c).$$

$R \rightarrow +\infty$  のとき、左辺第 3 項は 0 に収束する。ゆえに

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } c > 0} \text{Res}(f; c) + \pi i \sum_{j=1}^N \text{Res}(f; c_j). \quad \square$$

## 1.1.5 Dirichlet 積分 $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ (解決)

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

これは普通の広義積分として収束し、主値積分とも一致する。

$$I = \frac{1}{2} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Im} \frac{e^{ix}}{x} dx = \frac{1}{2} \text{Im} \left( \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx \right).$$

定理 1.9 (2) を用いて主値積分を計算すると

$$I = \frac{1}{2} \text{Im} \left( \pi i \text{Res} \left( \frac{e^{iz}}{z}; 0 \right) \right) = \frac{1}{2} \text{Im} \left( \pi i \frac{e^{iz}}{(z)'} \Big|_{z=0} \right) = \frac{1}{2} \cdot \text{Im} (\pi i \cdot e^{i0}) = \frac{\pi}{2}.$$

**注意** 「複素関数」の教科書 (神保 [2]) では、この定積分は主値積分という言葉は使わずに説明してあるが、実際にやっている議論は本質的に上と同じである。主値積分は色々なところで顔を出すので、それを紹介するような説明をしてみた。

# 1.2 級数の和

## 1.2.1 イントロ

無限級数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  の和を求めるためにも、留数が利用できる場合がある。簡単な場合を紹介する。

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$  で、 $a_n$  がある正則関数  $f$  に対して、 $a_n = f(n)$  となっている場合に、

$$n \in \mathbb{Z} \text{ を } 1 \text{ 位の極に持ち、} \operatorname{Res}(s; n) = 1$$

という条件を満たす  $s$  を適当に選んで、 $f \cdot s$  についての線積分を考える、というのが基本的なアイデアである ( $\operatorname{Res}(f s; n) = f(n) \operatorname{Res}(s; n) = f(n)$  に注意)。具体的には、 $s$  として次の関数を採用する:

$$s_2(z) := \pi \cot \pi z = \frac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \quad (\cot \text{ 知らなくても後で説明します}).$$

実はこの  $s_2$  は色々な場面で利用される。(「応用複素関数」の中で、最低一つはそういう話を見せておきたいので、ここでやってみた。)

## 1.2.2 $s_1, s_2, s_3$ の性質

この §1.2 を通じて、次式で定める  $s_1, s_2, s_3$  を用いる。

$$s_1(z) := \frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \pi \operatorname{cosec}(\pi z), \quad s_2(z) := \frac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \pi \cot(\pi z),$$

$$s_3(z) := s_2(z) - i\pi \quad \left( = \frac{2\pi i}{e^{2\pi iz} - 1} \right).$$

- $s_1, s_2$  の定義式の分母、分子は整関数 ( $\mathbb{C}$  全体で正則) である。
- $s_1, s_2$  の定義式の分母  $\sin(\pi z)$  の零点は  $n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) で、位数は 1. 実際

$$\sin(\pi z) = 0 \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) \pi z = n\pi \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) z = n.$$

さらに  $\frac{d}{dz}(\sin \pi z) \Big|_{z=n} = \pi \cos(n\pi) = (-1)^n \pi \neq 0$ .

- $s_1, s_2, s_3$  の極は  $n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) で、その位数は 1. 留数は

$$\operatorname{Res}(s_1; n) = \frac{\pi}{(\sin(\pi z))' \Big|_{z=n}} = (-1)^n,$$

$$\operatorname{Res}(s_3; n) = \operatorname{Res}(s_2; n) = \frac{\pi \cos(\pi z)}{(\sin(\pi z))' \Big|_{z=n}} = 1.$$

## 1.2.2 $s_1, s_2, s_3$ の性質 (続き)

以下の積分路  $\Gamma_N$  ( $N \in \mathbb{N}$ ) をしばしば用いる。

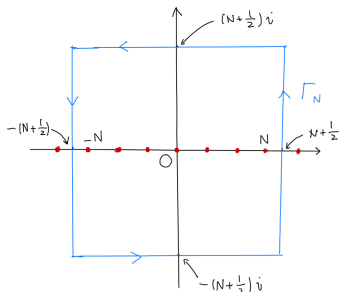


図 1: 1 辺  $2(N + 1/2)$  の正方形の周を正の向きに回る

- 曲線  $\Gamma_N$  上には  $s_1, s_2, s_3$  の極 (赤い点) はない。極との距離は  $1/2$ 。
  - $|s_j(z)| \leq 2\pi$  ( $j = 1, 2; z \in \Gamma_N^*$ ).
- (この不等式の証明に難しいところはないが、意外に面倒なのでここではサボる。講義ノート [1] §1.3 には書いてある。)

# ちょっと講釈: sec, cosec, cot

三角関数というと、学校数学では  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\tan$  の露出度が高いが、

セカント, コセカント, コタンジェント  
 $\sec$ ,  $\operatorname{cosec}$ ,  $\cot$  というものもある:

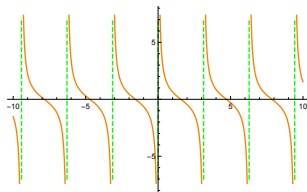
$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}, \quad \operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta}, \quad \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}.$$

大昔の三角関数表には (Wikipedia の [Trigonometric tables](#) 等参照)、 $\sin$ ,  $\tan$ ,  $\sec$  の値が載っていた。

$\cos(\text{ine})$ ,  $\cot(\text{angent})$ ,  $\operatorname{cosec}(\text{ant})$  は、それぞれ余角の  $\sin$ ,  $\tan$ ,  $\sec$  である:

$$\operatorname{co} \text{ 某 } \theta = \text{ 某 } \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) \quad (\text{ゆえに数表はほとんど不要}).$$

$y = \cot x$  のグラフは、 $\cot x = \tan(\pi/2 - x)$  に気づくとすぐ分かる。





(2023/4/18 の授業はここまです。)

- [1] 桂田祐史：続 複素関数論, 「複素関数」講義ノートの続き. <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2/zoku-complex-function.pdf> (2015～).
- [2] 神保道夫：複素関数入門, 現代数学への入門, 岩波書店 (2003), 丸善 eBook では  
じんぼう  
<https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000006063> でアクセスできる.