

応用複素関数レポート課題2

桂田 祐史

2022年6月14日

- 締め切りは7月11日(月曜) 22:00です。→ **サーバー停止した影響を考慮して、1週間延期します。**
- 提出方法: Oh-o! Meiji に A4サイズのPDFで提出して下さい。
容量制限(1ファイル30MB)に引っかかった場合は、複数のファイルに分割するなど工夫して下さい。
- 使用するプログラミング言語は、自分の MacBook で実行して見せることが可能なものであればなんでも可。
(本課題は、FreeFem++ によるサンプル・プログラムを提供しているので、FreeFem++ を採用するのが簡単でしょう。)
- プログラムとその実行結果、実行するための情報を含めること。プログラムは別ファイルにしても良いです(こちらが調べやすいので)。
- FreeFem++ の使い方については、
 - FreeFEM-documentation.pdf (公式ドキュメント)
<https://doc.freefem.org/pdf/FreeFEM-documentation.pdf>
 - 「FreeFem++ の紹介」桂田書いた紹介文書(更新が必要だけど…)
<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/text/welcome-to-freefem/>
 - 「FreeFem++ノート」(桂田の自分用メモ)
<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/text/freefem-note/>

課題2

2次元非圧縮ポテンシャル流の定常流で、流体の占める領域 Ω と、その境界 $\Gamma = \partial\Omega$ での流速の法線成分 $v_n := \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ が分かっている場合に、速度ポテンシャル ϕ 、流れ関数 ψ を計算して、等ポテンシャル線、流線、速度場を可視化せよ。領域 Ω と境界値(流速の法線成分) v_n は、自分で興味のあるもの、自分の都合の良いものを選んで良い(後の注意を読んでおくこと)。

ϕ は、ポテンシャル問題(ここでは Laplace 方程式の Neumann 境界値問題)

$$(1) \quad \Delta\phi = 0 \quad (\text{in } \Omega)$$
$$(2) \quad \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} = v_n \quad (\text{on } \Gamma)$$

の解である。

ポテンシャル問題 (1), (2) を解いて、等ポテンシャル線と速度場 \mathbf{v} を求めるサンプル・プログラム potential2d-v0.edp を公開してある。

potential2d-v0.edp は、ターミナルで次のようにして入手する

```
curl -O http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/potential2d-v0.edp
```

大筋は、 Ω と v_n を自分が決めたものにするようにプログラムを書き換えれば良い。(弱形式は変更する必要がない。) 自由度は高いので、工夫・遊び心発揮を期待する。

(過去の例では、円を楕円にするような(一見)安直な選択があったが、そういう人の多くは、 $\int_{\partial\Omega} v_n d\sigma = 0$ を満たす v_n が見つけれられなかったりしていた。)

流線の書き方には色々なやり方がある(一つくらいノーヒントの間を入れておくことにする)。選んだ問題によっては、分かりやすい図が描けるように調整が必要な場合もある。

注意

次の(1)が非常に重要である。例年それを間違えてナンセンスなレポートを提出する人が少なくない。

- (1) $v_n := \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ は $\int_{\Gamma} v_n d\sigma = 0$ を満たしている必要がある。実際、Gauss の発散定理と非圧縮性の仮定から

$$\int_{\Gamma} v_n d\sigma = \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} 0 d\mathbf{x} = 0.$$

サンプルプログラムでは、円盤領域 $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ なので $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (こ

こは良く考えること)。また一様流 $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ であったので、

$$v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + 2y$$

としてある。(\mathbf{v} が Ω で定数関数なので) $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ であるから、当然 $\int_{\Gamma} v_n d\sigma = 0$ も成り立つ。(そうでない場合は、きちんと計算して $\int_{\Gamma} v_n d\sigma = 0$ が成り立つことを確かめる必要がある。)

- (2) 湧き出しや吸い込み、点渦など、特異点が Ω 内にあるような問題は、この方法では解くことが出来ない。

質問されたことへの回答

- 境界値 v_n を、if を用いた場合分を含む関数としたいが、FreeFem++ がプログラムを受け付けてくれません → 例えば
 - (a) 弱形式には複数の `int1d()` が指定できるので、境界を分割して、その各部分ごとに(場合分けを含まない)境界値を与えるようにプログラムを書く。
 - (b) 例えば $(x > 1 \ \&\& \ y > 0)$ のような式は、条件が成り立つならば1, 成り立たないならば0という値を持つので、if を使わずに、式だけで場合分けを含む関数が記述できる。

サンプルプログラム解説

potential2d-v0.edp¹

```
1 // potential2d-v0.edp
2 // http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/potential2d-v0.edp
3 // 2次元非圧縮ポテンシャル流
4 // 速度ポテンシャル, 速度を求め、等ポテンシャル線, 速度場を描く
5
6 border Gamma(t=0,2*pi) { x = cos(t); y = sin(t); } // 円盤領域
7 int m=40;
8 mesh Th=buildmesh(Gamma(m));
9 plot(Th, wait=1, ps="Th.eps");
10 // 次の2行は区分1次多項式を使うという意味
11 fespace Vh(Th,P1);
12 Vh phi, v, v1, v2;
13 // 境界条件の設定
14 func Vn=x+2*y; // Ωが単位円で, V=(1,2) のとき  $V \cdot n = x + 2y$ 
15
16 // 速度ポテンシャル  $\phi$  を求め、その等高線 (等ポテンシャル線) を描く
17 solve Laplace(phi,v) =
18   int2d(Th)(dx(phi)*dx(v)+dy(phi)*dy(v)) -int1d(Th,Gamma)(Vn*v);
19 plot(phi,ps="contourpotential.eps",wait=1);
20
21 // ベクトル場  $(v1,v2)=\nabla\phi$  を描く (ちょっと雑なやり方)
22 v1=dx(phi); v2=dy(phi);
23 plot([v1,v2],ps="vectorfield.eps",wait=1);
24
25 // 等ポテンシャル線とベクトル場を同時に描く
26 plot([v1,v2],phi,ps="both.eps", wait=1);
```

- 6行目で領域 Ω の境界 Γ を指定している (それで Ω が決まる)。
- 8行目で、 Γ を m 分割して、 Γ の囲む範囲を三角形分割して、それを mesh 型の変数 Th に代入している。
- 11行目、有限要素空間 V_h を区分的1次関数の空間と定義している。この辺についてはこの講義では説明を省略する (知りたい人は有限要素法のテキストを読んで下さい)。
- 12行目、 ϕ と試験関数 v 、流速ベクトル場 v の成分 v_1, v_2 を、Vh の要素とする。
- 14行目、境界条件の設定をしている。ここで $v \cdot n = x + 2y$ とする理由は上の注意 (1) で説明した。
- 17~18行目、弱形式の定義。ここを修正する必要がある可能性は低い。