期末レポート課題

桂田 祐史

2022 年 7 月 12 日, 2022 年 7 月 21 日

期末試験がわりの期末レポート課題である。次のうちから 1 つ選んでレポートせよ。〆切は 7 月 31 日 (日曜) 22:00, Oh-o! Meiji に A4 サイズ PDF で提出。課題は後から追加する可能性がある。

留数の定積分・級数計算への利用

A1 留数を用いて定積分を計算する方法の中で、複素対数関数を利用するものがある。例えば

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = -\sum_{c\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty)} \operatorname{Res}(f(z)\log z; c).$$

ただし log は偏角の範囲を $(0, 2\pi)$ に選んだ複素対数関数である ($z \in \mathbb{C} \setminus [0,\infty)$ を $z = re^{i\theta}$ ($r > 0$, $\theta \in (0, 2\pi)$) と極形式で表示した場合に、$\log z = \log r + i\theta$)。$f$ についての仮定を書くのはさぼる (大体は桂田 [1] の §1.2 に書いてある)。この公式がなぜ成り立つか根拠を説明し、この公式を用いて

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{x^5+1}$$

を計算せよ。計算は意外と面倒なので、Mathematica を積極的に利用することを勧める (例えば $z^5 = -1$ の解を求めるなど)。

正則関数の表現

B1 Riemann のゼータ関数 ζ を複数の方法で可視化せよ (実関数のグラフ、実部・虚部・絶対値などのグラフや等高線)。ζ は $\operatorname{Re} z > -1$ の範囲ならば

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^z} \quad (\text{ただし } n^z = \exp(z \operatorname{Log} n)) \tag{1}$$

で定義されるが (桂田 [1] の例 2.12)、解析接続によってより広い領域まで拡張される (それについてレポート中で説明すれば加点する)。Mathematica であれば `Zeta[]` で、Python であれば `mpmath.zeta()` で、MATLAB であれば `zeta()` で計算できる。

(Riemann のゼータ関数は、数学好きならば知っている可能性の高い有名人 (有名な関数) である。数学系ソフトウェアの多くで計算が容易になっているので、気軽に触れることができる。ではやってみよう、という主旨である。)

流体力学への応用

C1 2次元の有界領域 Ω を占める完全流体のポテンシャル流があるとし、その速度場 $\boldsymbol{v}$ の境界での値 $(\boldsymbol{v}|_{\partial\Omega})$ が与えられているとする。このとき流れ関数 ψ を、ポテンシャル問題 (Laplace 方程式の境界値問題) の解として求める方法 (具体的にどうするか、それがうまく行くのはなぜか) を説明せよ。

(レポート課題 2 で流線を描くために ψ を使おうとした人達から質問を受けて、何度か答えたので、この際、レポート課題にしてしまえ (ちゃんと書いてみせて下さい)、という主旨である。(2022/7/21 追記) 課題の質問をしてきた人には、Dirichlet 境界値を求めて Dirichlet 問題の解として ψ を求める方法を説明したが、Neumann 境界値を求めることも出来ることに気づいた。興味ある人はチャレンジして下さい。結果はある意味できれいで、多分来年度の講義内容に含めると思います。)

等角写像

D1 単位円版 $D=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1\}$ の写像関数、つまり双正則な $\varphi\colon D\to D$ は、

$$\varphi(z)=e^{i\theta}\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\quad (ここで\ z_0\in D,\ \theta\in[0,2\pi)) \tag{2}$$

に限ることを示せ。φ が 1 次分数変換の場合にこの形になることは授業で説明する予定であるが、より一般に D から D への双正則な写像とした場合でも、(2) の形の写像しかないことは有名な結果である (それによって 1 次分数変換の重要性の理解が深まる)。少し程度の高い関数論のテキストには載っていることが多いので、それを読んで理解した上でまとめること。Schwarz の補題 (これも有名な定理) を用いる場合は、その証明も含めること。

(等角写像と 1 次分数変換については、授業で時間切れになるので、有名な結果を自習してみたらいかがでしょう、という主旨。載っているテキストが自分で見つけられなかったら質問してください。Maruzen eBook Library で閲覧できる本の中にも紹介できる本があるので、図書館に足を運ばなくても何とかなります。)

D2 1 次分数変換の鏡像の原理 (命題 14.2) を証明せよ。

数値積分

E1 Weyl の定理 (6 月 28 日) の証明を探し出して、読んで理解してレポートせよ。

参考文献

[1] 桂田祐史：続 複素関数論,「複素関数」講義ノートの続き. http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/zoku-complex-function.pdf (2015〜).