佐藤超函数の紹介

桂田 祐史

2017 年 7 月 6 日, 2022 年 6 月 21 日

「複素関数」は数学的にかなり厳密な議論をしたのに比べると、「応用複素関数」は少々ゆるい議論に止めているけれど (同じレベルで厳密な議論をするための準備が無理なため)、この文書は輪をかけて緩い基準になっている。

1 初めに — 超関数超入門

微分積分は便利であるが、微分が出来ない関数は多く、また極限の順序交換も出来ない場合が多い。

1.1 超関数前史 — デルタ関数 (あやしい、しかし役に立つ)

電気工学者の O. Heaviside (英国, 1850-1925) は、定数係数の微分方程式を解くための**演算子法** (operational calculus) を考えだしたが (1903 年)、数学的な正当化はしなかった[1]。Heaviside は、次の関数を導入して利用した。

(1)
$$Y(x) := \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x < 0). \end{cases}$$

これは **Heaviside の関数**あるいは **Heaviside の階段関数**と呼ばれる。本によっては $H(x)$ という記号で表すこともある。

(Heaviside については、脱線のような気がしないでもないけれど、小松 [3], [4] (いずれもネットで読める) が面白い。Heaviside も「衝撃函数 (impulsive function)」の名前でデルタ関数を導入済みであったとか書いてある。)

物理学者の Dirac (Paul Adrien Maurice Dirac, 1902–1984) は、1930 年に出版した「量子力学」の中で、次のような "**デルタ関数**" を導入した。

(2)
$$\delta(x) := \begin{cases} 0 & (x \neq 0) \\ \infty & (x = 0) \end{cases}$$

ただし $x = 0$ での無限大は

(3)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1$$

[1]最初の正当化は、T. Bromwich により、Laplace 変換を用いてなされた。J. Mikusinski は Laplace 変換を用いず、代数的な議論で演算子法を展開した (ミクシンスキー [1], [2])。

を満たす程度であるとする (この説明は、後でも述べるように、積分論的にはめちゃくちゃである)。この “関数” δ は、任意の連続な関数 $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\delta(x)\,dx = \varphi(0) \tag{4}$$

を満たすことが導ける。実際、

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\delta(x)\,dx - \varphi(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\delta(x)\,dx - \varphi(0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi(x) - \varphi(0))\,\delta(x)\,dx \\ &= (\varphi(x) - \varphi(0))|_{x=0} \\ &= \varphi(0) - \varphi(0) = 0.\end{aligned}$$

このデルタ関数は、実は普通の関数ではない。実際、$D\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が Lebesgue 可測な関数で、

$$D(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

を満たすならば、D はほとんど到るところ 0 に等しいので、

$$\int_{-\infty}^{\infty} D(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} 0\,dx = 0$$

が成り立ち、(3) と矛盾するからである。

このように δ は “おかしな” 関数であるが、物理的には、単位質量を持つ質点の密度、単位点電荷の電荷密度のように解釈でき、自然なものである、という説明を「信号処理とフーリエ変換」を履修した人は聞いた覚えがあるであろう。

Dirac は、Y と δ の間には

$$Y'(x) = \delta(x) \tag{5}$$

の関係があると主張した。

証明もどき (Schwartz の超関数理論では適当に修正すると証明になる)

$\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は滑らかで、遠方で 0 となる任意の関数とするとき、

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} Y'(x)\varphi(x)\,dx &= [Y(x)\varphi(x)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} Y(x)\varphi'(x)\,dx \\ &= 0 - \int_{0}^{\infty} \varphi'(x)\,dx = -\left[\varphi(x)\right]_{x=0}^{x=\infty} = \varphi(0) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)\,dx,\end{aligned}$$

すなわち

$$\int_{-\infty}^{\infty} Y'(x)\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)\,dx$$

が成り立つので

$$Y'(x) = \delta(x). \blacksquare$$

この議論はかなり怪しいが、この Y と δ のペアはしばしば役に立つ結果を導出できた。

1.2 二つの超関数論

1.2.1 Schwartz の distribution (役に立つならば正当化してみせよう)

L. Schwartz (Laurent Schwartz, 1915–2002) は、1940 年代後半に、**超関数** (distribution) の理論を創り、Dirac の議論の数学的正当化に成功した。

> 「工学者が長年使っていてボロのでない算法というものは必ず数学的に正当化できるはず。」

ここで詳しい話は出来ないが、Schwartz の理論における導関数では、部分積分が鍵となる。例えば上でやった議論は、(Schwartz の理論では) $Y' = \delta$ の正しい証明である。(部分積分を使うのは、Schwartz にさきがけた Sobolev の**一般化導関数**の基本的なアイディアでもあった。)

Schwartz はこの業績によって、1950 年にフィールズ賞を受賞した。

1.2.2 佐藤幹夫の hyperfunction

佐藤幹夫 (1928–) は、正則関数の境界値の差として超関数をとらえるアイディアに基づき、Schwartz とは別の超関数論を建設した (1958 年, [5])。Schwartz の distribution と区別するため、**hyperfunction** と名付けた。

日本語では、佐藤 (の) 超関数と呼ばれる。超函数と書かれることの方が多いかもしれない。

2 佐藤超函数の定義 (のようなもの)

次のことを思い出そう: φ を複素平面の原点の近傍 U で正則な関数、C を U 内の区分的 C^1 級の曲線で、原点の周りを正の向きに一周する曲線とするとき

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\varphi(z)}{z}\,dz = \varphi(0)$$

が成り立つ (Cauchy の積分公式、あるいは留数定理による)。

C のうち上半平面にある部分, 下半平面にある部分をそれぞれ C_+, C_+ とし、区間 $[a,b]$ (ただし $0 \in (a,b)$, $[a,b] \subset \Omega$) にくっつくように変形すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\varphi(z)}{z}\,dz &= \int_{a-i0}^{b-i0} \frac{1}{2\pi i}\frac{\varphi(z)}{z}\,dz - \int_{b+i0}^{a+i0} \frac{1}{2\pi i}\frac{\varphi(z)}{z}\,dz \\ &= \int_a^b \frac{-1}{2\pi i}\left(\frac{1}{x+i0} - \frac{1}{x-i0}\right)\varphi(x)\,dx.\end{aligned}$$

この右辺は何？とりあえず

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^b \frac{-1}{2\pi i}\left(\frac{1}{x+i\varepsilon} - \frac{1}{x-i\varepsilon}\right)\varphi(x)\,dx$$

くらいに解釈して下さい。

そこで佐藤はデルタ関数を

$$\delta(x) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{x+i0} - \frac{1}{x-i0}\right) \tag{6}$$

と捉え、この事情を一般化して

と定義した。

定義 2.1 (のようなもの) $\mathbb{C}$ の開集合 Ω で正則な関数全体の集合を $\mathcal{O}(\Omega)$ と表す。$F \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$ に対して、

$$F(x+i0) = F_+(x) := \lim_{\substack{z \to x \\ \operatorname{Im} z > 0}} F(z), \quad F(x-i0) = F_-(x) := \lim_{\substack{z \to x \\ \operatorname{Im} z < 0}} F(z)$$

とおき、

$$F(x+i0) - F(x-i0)$$

を F が定める**超函数**という。また F をその超函数の**定義関数**と呼ぶ。

$\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$, $\mathbb{C}_- := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z < 0\}$, $F_+ = F|_{\mathbb{C}_+}$, $F_- = F|_{\mathbb{C}_-}$ として、上半平面、下半平面で定義された正則関数の組 (F_+, F_-) が超函数を定める、と言っても同じことである。

注意 2.2 $\mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$ の任意の要素 F (あるいは (F_+, F_-)) は超函数を定めるが、重複がある。$\mathbb{R}$ の近傍で正則な関数 Φ に対して $(F_+ + \Phi)(x+i0) - (F_- + \Phi)(x-i0)$ は $F_+(x+i0) - F_-(x-i0)$ と同じ超函数である (Φ がキャンセルすることに注意する)。正確には、

$$F \sim G \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad F - G \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$$

で定まる同値関係の同値類として超函数を定める。■

以下では、超函数 $f(x)$ が $F \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$ で定まることを

$$f(x) = [F(z)]$$

と表すことにする。

デルタ関数について

$$\delta(x) = \left[-\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z} \right] \tag{7}$$

が分かったが、Heaviside の階段函数については (Log を対数関数の主値として)

$$Y(x) = \left[-\frac{1}{2\pi i} \operatorname{Log}(-z) \right] \tag{8}$$

である。(証明) 対数関数の主値について $\operatorname{Log}(x+i0) - \operatorname{Log}(x-i0) = \begin{cases} 0 & (x > 0) \\ 2\pi i & (x < 0) \end{cases}$ であることを知っている (「複素関数」で説明済み)。そこで

$$F(z) := -\frac{1}{2\pi i} \operatorname{Log}(-z)$$

とおくと、

$$F(x+i0) - F(x-i0) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x < 0). \blacksquare \end{cases}$$

余談 2.3 「複素関数」で、(定積分の留数を用いた計算の際などに) しばしば $\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$ で対数関数の分枝を次のように定めて用いた。

$$\log z = \log r + i\theta \quad (z = re^{i\theta},\ r > 0,\ \theta \in (0, 2\pi)).$$

この log と $\mathrm{Log}(-z)$ の間には

$$\mathrm{Log}(-z) = \log z - i\pi$$

という関係がある[2]。Y を定義するためには、(差が等しければよいので) $-\frac{1}{2\pi i}\mathrm{Log}(-z)$ の代わりに $-\frac{1}{2\pi i}\log z$ を用いることも可能である。しかし、log の説明が面倒なためか (Log はただ単に「主値」と言えば済むし、言わなくても主値と解釈する人が多いであろう)、$\mathrm{Log}(-z)$ を使うことが多いようである (個人的には $(-z)$ というの分かりにくくて嫌いなんだけど)。 ■

3 超函数の演算

和とスカラー倍は簡単であるから省略する。

3.1 導関数

やや天下りに感じられるかもしれないが、超函数の導関数は次のように定義するのが良い。

定義 3.1 (超函数の導関数) 超函数 $f(x) = [F(z)]$ の導関数を

$$f'(x) = [F'(z)] \tag{9}$$

で定める。すなわち $[F(z)]' = [F'(z)]$.

すでに

$$\delta(x) = \left[-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z}\right], \qquad Y(x) = \left[-\frac{1}{2\pi i}\mathrm{Log}(-z)\right]$$

であることを見たが、

$$\left(-\frac{1}{2\pi i}\mathrm{Log}(-z)\right)' = -\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z} \tag{10}$$

であるから、

$$Y'(x) = \delta(x) \quad (\text{佐藤超函数として}). \tag{11}$$

(個人的な回想: 超函数として Schwartz の超函数 (distribution) を先にならったので、$Y' = \delta$ の根拠が (10) であるという話には鮮烈な印象を持った。)

3.2 Fourier 変換

(ここは Fourier 変換を知っている人向けになる。あしからず。)

関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ に対して

$$(\mathscr{F}f)(\xi) = \hat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}\,dx \quad (\xi \in \mathbb{R})$$

[2] 実際、$z = re^{i\theta}$ $(r > 0,\ \theta \in [0, 2\pi])$ のとき、$-z = re^{i(\theta-\pi)}$, $\theta - \pi \in [-\pi, \pi)$ であるから、$\mathrm{Log}(-z) = \log r + i(\theta - \pi) = \log z - i\pi$.

で定まる関数 $\mathscr{F}f$ を、f の Fourier 変換と呼ぶが、普通の意味では積分が収束しないことが多い[3]。この困難を克服するために、Fourier 解析に超函数は必要不可欠である。

定義 3.2 (佐藤超函数における Fourier 変換) 関数 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ の Fourier 変換 $\mathscr{F}f=\hat{f}$ を次式で定める:

$$\mathscr{F}f(\xi)=\hat{f}(\xi):=F_+(\xi+i0)-F_-(\xi-0) \tag{12a}$$

ただし

$$F_+(\zeta):=\int_{-\infty}^{0}e^{-ix\zeta}f(x)\,dx\quad(\operatorname{Im}\zeta>0) \tag{12b}$$

$$-F_-(\zeta):=\int_{0}^{\infty}e^{-ix\zeta}f(x)\,dx\quad(\operatorname{Im}\zeta<0). \tag{12c}$$

F_+ と F_- の定義式の積分において、どちらも $\operatorname{Re}(-ix\zeta)=x\operatorname{Im}\zeta<0$ を満たすので、f に関する緩い条件のもとで、(12b), (12c) の積分は収束することに注意しよう。

例 3.3 (1 の Fourier 変換) 定数関数 $f(x)=1$ の Fourier 変換を求めよう (これは超函数論を使えない科目「画像処理とフーリエ変換」では、お話として紹介するだけで、証明らしいことは出来なかった。)。

$$F_+(\zeta)=\int_{-\infty}^{0}e^{-ix\zeta}\,dx=\left[\frac{e^{-ix\zeta}}{-i\zeta}\right]_{x=-\infty}^{x=0}=-\frac{1}{i\zeta},$$
$$F_-(\zeta)=-\int_{0}^{\infty}e^{-ix\zeta}\,dx=-\left[\frac{e^{-ix\zeta}}{-i\zeta}\right]_{x=0}^{x=\infty}=-\frac{1}{i\zeta}$$

であるから

$$\mathscr{F}f(\xi)=\frac{-1}{i}\left(\frac{1}{\xi+i0}-\frac{1}{\xi-i0}\right)=2\pi\delta(\xi).$$

こうして “有名な”

$$\mathscr{F}1=2\pi\delta \tag{13}$$

が得られる[4]。■

[3] Lebesgue 積分で解釈する場合、$\left|f(x)e^{-ix\xi}\right|=|f(x)|$ であるので、$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx<\infty$ が積分が存在するための必要十分条件である。(例えば Fourier 解析で重要な $\operatorname{sinc}x=\dfrac{\sin x}{x}$ はこの条件を満たさない。)

[4]「信号処理とフーリエ変換」では、$\mathscr{F}f(\xi)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ix\xi}d\xi$ と定義したので ($\sqrt{2\pi}$ で割ってある)、$\mathscr{F}1(\xi)=\sqrt{2\pi}\delta$ である、と説明した。

3.3 積分

定義 3.4 (超函数の積分) $f(x) = F_+(x+i0) - F_-(x-i0)$ を、実軸上の有界閉区間 $[a,b]$ の近傍で定義された超函数で、端点 a, b の近傍で実解析的なものであるとする。C を複素平面内の区分的 C^1 級の閉曲線で、$[a,b]$ を正の向きに1周するものとして

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{C+} F_+(z)\,dz - \int_{C-} F_-(z)\,dz. \tag{14}$$

$f(x) = [F(z)]$ のとき、$\int_a^b f(x)dx := \int_C F(z)\,dz$ とも書ける。

最近、定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ の近似値を求めるために、$\displaystyle\int_C F(z)\,dz$ を台形則で数値計算するというアルゴリズムが提唱され (なるほど！)、注目を浴びている。

コンパクトな台を持つ超函数 f に対して、

$$G(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-z}\,dx \quad (z \in \mathbb{C}\setminus \operatorname{supp} f)$$

で定めた G は正則で

$$f(x) = [G(z)]$$

が成り立つことが証明できる。ゆえに G は f の定義関数であるが、**標準定義関数**と呼ばれる。

f が普通の可積分関数であるときも、G は正則関数となるが、G の定める超函数を、f を超函数とみなしたものと考える。

例 3.5 $[a,b]$ の定義函数 $\chi_{[a,b]}$ を超函数とみなしたときの標準定義関数は

$$\frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{dx}{x-z} = \frac{1}{2\pi i}\operatorname{Log}\frac{z-b}{z-a}.$$

この導関数は $\dfrac{1}{2\pi i}\left(\dfrac{1}{z-b} - \dfrac{1}{z-a}\right)$ であるから、

$$\chi'_{[a,b]}(x) = \delta(x-a) - \delta(x-b).$$

この結果は納得しやすい ($x = a, b$ をのぞくと $\chi_{[a,b]}(x) = Y(x-a) - Y(x-b)$ であり、この両辺を微分する)。 ■

4 参考書案内

原論文である佐藤 [5] を入手して、眺めてみることは、意外とオススメである (オリジナル、日本語、ネットで入手可能、予備知識なくても読めるところ多い、良いことづくめ)。日本語で読める重要な数学論文の筆頭に上げたい論文である。

京都大学数理解析研究所を紹介している内村 [6] の多くの部分は、佐藤幹夫先生の話がしめていて面白く読める。

現在、比較的入手しやすいテキストは (いずれも新刊では買えないが…)、森本 [7], 金子 [8] である。実は [8] の第1章がこの文書の種本である。

今井 [9] は、超函数に流体力学的イメージ (渦層) がつけられるという話で、筆者は最初に読んだとき鮮烈な印象を持った。まるまる2巻、1変数超函数の話で、具体的な計算例を色々

知りたい場合に一推しである (計算例の多くは Schwartz 超関数としても導出できるが、佐藤超函数でやった方が簡単、ということが多い)。

1 変数の部分をやさしく読み解き、Schwartz の distribution との関係も解説した山中 [10] は、便利であるが、入手しにくいのが難点である。

参考文献

[1] ミクシンスキー, Mikusiński, J.：演算子法 上, 裳華房 (1965), 松村 英之・松浦 重武 訳.

[2] ミクシンスキー, Mikusiński, J.：演算子法 下, 裳華房 (1967), 松浦 重武・笠原 晧司 訳.

[3] 小松彦三郎：Laplace 超函数による微分方程式の解法, 京都大学数理解析研究所講究録, Vol. 935, pp. 21–52 (1996), https://repository.kulib.kyoto-u.ac.jp/dspace/bitstream/2433/60022/1/0935-3.pdf で入手可能。

[4] 小松彦三郎：Heaviside の数学, 2003 年度日本数学会年会 企画特別講演アブストラクト集, pp. 55–65 (2003), https://www.jstage.jst.go.jp/article/emath1996/2003/Spring-Meeting/2003_Spring-Meeting_55/_pdf/-char/ja で入手可能。

[5] 佐藤幹夫：超函数の理論, 数学, Vol. 10, No. 1, pp. 1–27 (1958 年 10 月), https://www.jstage.jst.go.jp/article/sugaku1947/10/1/10_1_1/_pdf から入手可能である。タイトルで検索すれば見つけられる。

[6] 内村直之：古都がはぐくむ現代数学, 日本評論社 (2013/11/20).

[7] 森本光夫：佐藤超函数入門, 共立出版 (1976, 2000 復刊).

[8] 金子晃：新版 超函数入門, 東京大学出版会 (1996), もともと二分冊で出版されたものの復刊。

[9] 今井功：応用超関数論 I, II, サイエンス社 (1981).

[10] 山中健：線形位相空間と一般関数, 共立出版 (1966).