4月12日の授業の補足

桂田 祐史

2022年4月19日, 2022年4月19日

定理 0.1 (実軸上に1位の極がある場合の定積分の公式) $P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $f(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}$, P は $\mathbb{R}$ 上で高々1位の零点しか持たないとする。

(1) $\deg P(z) \ge \deg Q(z) + 2$ のとき

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c > 0} \operatorname{Res}(f; c) + \pi i \sum_{\operatorname{Im} c = 0} \operatorname{Res}(f; c).$$

(2) $\deg P(z) \ge \deg Q(z) + 1$ のとき、任意の $a > 0$ に対して

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iax}\,dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c > 0} \operatorname{Res}(f(z)e^{iaz}; c) + \pi i \sum_{\operatorname{Im} c = 0} \operatorname{Res}(f(z)e^{iaz}; c).$$

(2) の証明 P の零点のうち、実軸上にあるものを $c_1 < c_2 < \cdots < c_N$ とする。

$\overline{D}(c_j; \varepsilon)$ に c_j 以外の極が含まれないように $\varepsilon > 0$ を十分小さく取る。

R を十分大きく取り、P のすべての零点が $|z| < R$ の中にあり、$-R < c_1 - \varepsilon$, $c_N + \varepsilon < R$ を満たすとする。

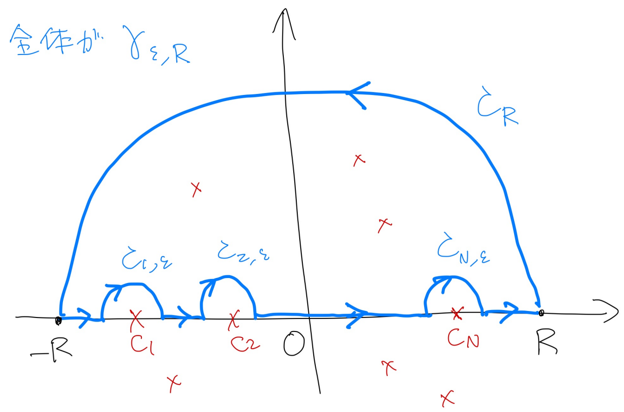
半円弧 $C_{j,\varepsilon}$ $(j = 1, \cdots, N)$ を

$$-C_{j,\varepsilon} : z = c_j + \varepsilon e^{i\theta} \quad (\theta \in [0, \pi])$$

で定め (ふつうと逆向き, 時計回り)、

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\varepsilon,R} &:= [-R, c_1 - \varepsilon] + \sum_{j=1}^{N-1} (C_{j,\varepsilon} + [c_j + \varepsilon, c_{j+1} - \varepsilon]) + [c_N + \varepsilon, R], \\
C_R &: z = Re^{i\theta} \quad (\theta \in [0, \pi]), \\
\gamma_{\varepsilon,R} &:= \Gamma_{\varepsilon,R} + C_R
\end{aligned}$$

により閉曲線 $\gamma_{\varepsilon,R}$ を定める。



留数定理によって

$$\sum_{j=1}^{N}\int_{C_{j,\varepsilon}} f(z)e^{iaz}\,dz+\int_{[-R,R]\setminus\bigcup_{j=1}^{N}[c_j-\varepsilon,c_j+\varepsilon]} f(z)e^{iaz}\,dz+\int_{C_R} f(z)\,dz$$
$$=2\pi i\sum_{\operatorname{Im}c>0}\operatorname{Res}\left(f(z)e^{iaz};c\right).$$

左辺の第 2 項は、区間 $[-R,R]$ 上にある極 $c_1,\cdots,c_N$ を対称に避けて、関数 $f(x)e^{iax}$ を積分したものである。これが $\varepsilon\to 0$ としたときに収束するとき、その極限を

$$\text{p.v.}\int_{-R}^{R} f(x)e^{iax}dx$$

と表すことになっている (主値積分)。

念のため簡単な例で説明: $\text{p.v.}\displaystyle\int_{-2}^{1}\frac{1}{x}\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-2}^{-\varepsilon}\frac{1}{x}\,dx+\int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{x}\,dx\right).$

第 1 項については

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_{j,\varepsilon}} f(z)e^{iaz}dz\to -\pi i\operatorname{Res}\left(f(z)e^{iaz};c_j\right)$$

となることを前回示した。

念のため再録

c_j は P の 1 位の零点であるから、$f(z)e^{iaz}$ の 1 位の極であり、$f(z)e^{iaz}$ の c_j における Laurent 展開の主部は

$$\frac{a_{-1,j}}{z-c_j}\quad\left(\text{ただし } a_{-1,j}:=\operatorname{Res}\left(f(z)e^{iaz};c_j\right)\right)$$

である。それを除いた部分は g_j は、十分小さな $R_j>0$ に対して $D(c_j;R_j)$ で正則である。

$$f(z)e^{iaz}=\frac{a_{-1,j}}{z-c_j}+g_j(z)\quad(0<|z-c_j|<R_j)$$

であるから

$$\int_{C_{j,\varepsilon}} f(z)e^{iaz}\,dz=\int_{C_{j,\varepsilon}}\frac{a_{-1,j}}{z-c_j}\,dz+\int_{C_{j,\varepsilon}} g(z)\,dz$$

この右辺第 1 項は

$$\int_{C_{j,\varepsilon}}\frac{1}{z-c_j}\,dz=-\int_0^{\pi}\frac{1}{(c_j+\varepsilon e^{i\theta})-c_j}\cdot i\varepsilon e^{i\theta}\,d\theta=-i\int_0^{\pi}d\theta=-\pi i,$$

右辺第 2 項は ($\varepsilon < R_j/2$ ならば)

$$\left|\int_{C_{j,\varepsilon}} g(z)\ dz\right| \leq \max_{|z-c_j|\leq R_j/2} |g(z)| \int_{C_{j,\varepsilon}} |dz| = \max_{|z-c_j|\leq R_j/2} |g(z)|\, \pi\varepsilon \to 0 \quad (\varepsilon \to 0)$$

であるから

$$\int_{C_{j,\varepsilon}} f(z)e^{iaz}\ dz \to -\pi i a_{-1,j} = -\pi i \operatorname{Res}\left(f(z)e^{iaz}; c_j\right).$$

$\varepsilon \to 0$ とすると

$$-\pi i \sum_{j=1}^{N} \operatorname{Res}\left(f(z)e^{iaz}; c_j\right) + \text{p.v.} \int_{-R}^{R} f(x)e^{iax}dx + \int_{C_R} f(z)\ dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c>0} \operatorname{Res}\left(f(z)e^{iaz}; c_j\right).$$

$R \to \infty$ とすることで定理が証明される。■

訂正　定理の (1) と (2) のうち、(1) は上の積分路で良いが、(2) の方は実は次の積分路を使うべきだった。A, B は R より大きく選び、最後に $A, B \to \infty$ とする。