応用複素関数 第 14 回

～ Riemann 球面と 1 次分数変換 (2) ～

桂田 祐史（かつらだ まさし）

2022 年 7 月 19 日

目次

連絡事項＆本日の内容

- 「Riemann 球面と 1 次分数変換」(桂田 [1] の第 3 章」) の残りを解説する。シラバスでは、第 4 回授業で解説するはずだったもの。
- 「佐藤超函数の紹介」は今年度は見送る (昨年度のスライド PDF は授業 WWW サイトで公開している)。これ以外はほぼ例年通りの講義内容となった。
- レポートについて
  - レポート課題 3　〆切 7 月 30 日 23:00
  - 期末レポート課題　〆切 7 月 31 日 22:00
- 今日はささっと終えて、後は質問受付時間とします。

2.9 Riemann 球面は Riemann 面である

(この 1 枚のスライドは、ただのお話です。キーワード紹介程度に考えて下さい。)

曲線、曲面の概念を一般化した概念に**多様体**(たようたい) (manifold) というものがあり、現代の数学 (特に幾何学) では基本的概念とされている。

おおざっぱに言うと、多様体とは、局所的には $\mathbb{R}^n$ または $\mathbb{C}^n$ の球 ($\mathbb{C}^1 = \mathbb{C}$ の場合は円盤) とみなせるような位相空間のことである。

特に、局所的に $\mathbb{C}$ の円盤とみなせるようなもの (1 次元の複素多様体) を **Riemann 面**とよぶ。

$\mathbb{C}$ 自身や、$\mathbb{C}$ の開集合は Riemann 面であるが、Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ も Riemann 面である。実際、$a \in \mathbb{C}$ の近傍 $U(a; r) = D(a; r)$ はそのまま $\mathbb{C}$ の円盤であるし、∞ の近傍 $U(\infty; R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\} \cup \{\infty\}$ は $w = \frac{1}{z}$ により $\mathbb{C}$ の円盤 $\{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1/R\}$ に写る。

この座標変換 $w = 1/z$ により、$z = \infty$ においても、関数の微分可能性や留数を考えたりできる。($F(w) = f(1/w)$ が $w = 0$ で微分できるとき、f は ∞ で微分可能という等。) 関数論のテキストによく出て来る。

2.10 1次分数変換の鏡像の原理 (1) 鏡像の位置

$\widehat{\mathbb{C}}$ の円は 1 次分数変換で $\widehat{\mathbb{C}}$ の円に写ることを示した。
円上にない点についても、注目すべき性質が成り立つ。

定義 14.1 (円に関して鏡像の位置)

C は $\widehat{\mathbb{C}}$ の円であり、$z, z' \in \widehat{\mathbb{C}}$ とする。z と z' が C に関して互いに**鏡像の位置**にある (z と z' が C に関して対称である) とは，次の (a), (b) のいずれかが成り立つことをいう。

(a) C が $\mathbb{C}$ の直線であり、z と z' が C に関して対称の位置にある。

(b) C が $\mathbb{C}$ の円であり、z と z' が円 C の中心 c から発する一本の半直線上にあって、しかも $|z-c||z'-c| = r^2$ (r は円 C の半径) を満たす。円の中心 c と ∞ とはその円に関して鏡像の位置にあるとする。

2.10 1 次分数変換の鏡像の原理 (2) 鏡像の原理

命題 14.2 (1 次分数変換の鏡像の原理)

C は $\hat{\mathbb{C}}$ の円、z と z' は C に関して互いに鏡像の位置にある 2 点、f は 1 次分数変換とするとき、$f(z)$ と $f(z')$ は $\hat{\mathbb{C}}$ の円 $f(C)$ に関して互いに鏡像の位置にある。

証明のあらすじ

色々な方法があるが、素朴な計算で証明してみよう。

f が平行移動 $T_d(z) = z + d$, 定数倍 $M_a(z) = az$ $(a \neq 0)$, 反転 $R(z) = \frac{1}{z}$ について確かめれば良い (任意の 1 次分数変換は、それらの合成として表せるから)。

平行移動、定数倍について成り立つことは、直観的にも明らかであろう。

反転 $R(z) = \frac{1}{z}$ については、少々計算が必要であるが、次のことを使うと見通しが良い。

ヒント　z, z' が c から発する一本の半直線上にあり、かつ $|z - c||z' - c'| = r^2$ を満たすためには、 $(z - c)(\overline{z'} - \overline{c}) = r^2$ を満たすことが必要十分である。

以下は各自に任せる (レポート課題 D2 とする)。

2.11 1次分数変換による領域の等角写像　イントロ

今年度は、既に双正則、領域の等角写像 (写像関数)、Riemann の写像定理を紹介した (第 8 回授業 §4.3 Riemann の写像定理)。

ここでは、単位円盤領域の等角写像、上半平面の等角写像を紹介する (いずれも 1 次分数変換であり、基礎事項と言える)。

1 次分数変換は、Riemann の写像定理の証明でも基本的ツールとして使われる。

単位円盤を D_1 とおく: $D_1 := D(0;1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

正則関数が正則な逆写像を持つとき、**双正則**(そうせいそく)という。

$\widehat{\mathbb{C}}$ の領域 Ω に対して、$\varphi\colon \Omega \to D_1$ が双正則であるとき、φ を **Ω の等角写像**あるいは **Ω の写像関数**とよぶ。

定理 14.3 (Riemann の写像定理)

$\mathbb{C}$ の領域 Ω が単連結で、$\Omega \neq \mathbb{C}$ ならば、Ω の等角写像が存在する。

Ω は $\mathbb{C}$ の領域, $z_0 \in \Omega$ とするとき、Ω の等角写像で、次の条件 (しばしば**正規化条件**とよばれる) を満たすものは一意的である。

(1) $$\varphi(z_0) = 0, \quad \varphi'(z_0) > 0.$$

"簡単な" 領域の等角写像が 1 次分数変換になることが結構多い。

(等角写像が 1 次分数変換そのものでなくても、その構成に 1 次分数変換が使われるものはとても多い)。

2.11 1次分数変換による領域の等角写像　円盤の場合

次は非常に有名な定理である。

定理 14.4 (単位円盤の等角写像)

$\Omega = D_1$, $z_0 \in \Omega$ とする。双正則な $\varphi \colon \Omega \to D_1$ で、$\varphi(z_0) = 0$ を満たすものは

$$\varphi(z) := \varepsilon \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}, \quad \varepsilon \in \mathbb{C}, \quad |\varepsilon| = 1. \tag{2}$$

($\varepsilon = e^{i\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R}$) とも書ける。つまり回転だけの自由度しか残らない。)

$\varphi'(z_0) > 0$ という条件を課すと、$\varepsilon = 1$ と定まる。

この事実の証明を期末レポート課題 (の選択肢の 1 つ) とする。(2) の φ が条件を満たすこと、条件を満たす 1 次分数変換が (2) に限られることは初等的に導ける。

双正則という仮定から、φ が 1 次分数変換に限られる、というところに **Schwarz の補題**という有名な定理 (証明はそれほどむつかしくない) が必要になる。

$$H := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$$

を**上半平面**とよぶ。

命題 14.5 (上半平面の等角写像)

次式で定義される $\varphi\colon H \to D_1$ は H の等角写像である。

$$\varphi(z) := \frac{z-i}{z+i}. \tag{3}$$

略証　1次分数変換は一般に双正則であるから、$\varphi(H) = D_1$ を確かめれば良い。それは、計算で得られる $1 - |\varphi(z)|^2 = \dfrac{4 \operatorname{Im} z}{|z+i|^2}$ から分かる ($|\varphi(z)| < 1 \Leftrightarrow \operatorname{Im} z > 0$ に注意)。 $\square$

この φ は、**Cayley 変換**(ケーリー)とよばれる。φ は実軸 $\mathbb{R}$ (H の境界) を単位円周 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ (D_1 の境界) に写す。

(余談) Hilbert 空間における自己共役作用素と unitary 変換とが、Cayley 変換で移り合うという有名な事実がある。

上半平面を単位円盤に写す1次分数変換の一般形は

$$(4) \qquad w = \alpha \frac{z-\beta}{z-\overline{\beta}}, \quad |\alpha| = 1, \quad \mathrm{Im}\,\beta > 0$$

である。$\beta = i$, $\alpha = 1$ のときが、Cayley 変換となる。

その他、実軸 $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ を自分自身に写す1次分数変換というのもあるが、省略する。

2.12 落穂拾い 非調和比

$\widehat{\mathbb{C}}$ の相異なる 3 点 α, β, γ に対して、

$$(z,\alpha,\beta,\gamma) := \frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}\cdot\frac{z-\beta}{z-\gamma}$$

とおき、z, α, β, γ の**非調和比** (cross ratio) とよぶ。

これはつまり、α, β, γ をそれぞれ 1, 0, ∞ に写す一次分数変換による z の像である。

命題 14.6

1 次分数変換は非調和比を変えない。すなわち、任意の一次分数変換 f に対して

$$(z,\alpha,\beta,\gamma) = (f(z), f(\alpha), f(\beta), f(\gamma))$$

が成り立つ。

(証明) $f(\alpha)$, $f(\beta)$, $f(\gamma)$ を 1, 0, ∞ に写す 1 次分数変換を φ とすると、

$$\varphi(w) = (w, f(\alpha), f(\beta), f(\gamma)) \quad (w\in\widehat{\mathbb{C}}).$$

$\varphi\circ f$ は α, β, γ を 1, 0, ∞ に写す 1 次分数変換であるから、

$$\varphi(f(z)) = \varphi\circ f(z) = (z,\alpha,\beta,\gamma) \quad (z\in\widehat{\mathbb{C}}).$$

ゆえに

$$(f(z), f(\alpha), f(\beta), g(\gamma)) = (z,\alpha,\beta,\gamma) \quad (z\in\widehat{\mathbb{C}}). \quad \square$$

参考文献

[1] 桂田祐史：続 複素関数論，「複素関数」講義ノートの続き. http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/zoku-complex-function.pdf (2015 〜).

お疲れ様。レポートを提出した後は、良い夏休みが迎えられますように。