応用複素関数 第 13 回

～ Riemann 球面と 1 次分数変換 ～

かつらだ まさし
桂田 祐史

2021 年 7 月 12 日

目次

連絡事項&本日の内容

- 残り 2 回「Riemann 球面と 1 次分数変換」について解説する。シラバスでは第 3, 4 回に解説するはずだったもの。「佐藤超函数の紹介」は今年度は見送る (昨年度のスライド PDF は授業 WWW サイトで公開している)。
- レポートについて
  - 確認事項:
    レポート課題 2　締め切り 7 月 18 日 22:00
    レポート課題 3　締め切り 7 月 30 日 23:00
  - 期末レポート課題 (“レポート課題 ABC”)　締め切り 7 月 31 日 23:00.
- 複素関数論の基本的なツールである 1 次分数変換を紹介する (桂田 [1] の §3 の内容, ただしあまり対応は良くない)。そのために、それ自身重要な無限遠点 ∞, Riemann 球面も紹介する。

最初に問: ∞ は数か？ (Cf. 実数で考えるときの $+\infty, -\infty$)

答: ∞ は複素数ではない。「複素関数」ではモノですらなかった。

∞ をモノに格上げし、$\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を考え、距離空間とする。

$\displaystyle\lim_{z\to a} f(z) = \infty \Leftrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ において $f(z)$ が ∞ に収束する、とする。

そうすると $\widehat{\mathbb{C}}$ はもう体ではない。∞ は数ではなく、それに準ずるもの。

$\widehat{\mathbb{C}}$ を **Riemann 球面**とよぶ。

$\widehat{\mathbb{C}}$ を $\mathbb{P}^1$, $\mathbb{P}(\mathbb{C})$ とも表す (1 次元複素射影空間と呼ばれる)。**Riemann 面** (説明は略) の典型例である。

こうお膳立てすると、$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ という関数は非常に基本的となる。これを **1 次分数変換**とよぶ。

$\widehat{\mathbb{C}}$ において、lim と「合う」ように次のように定めることもある。

1. $(\forall a \in \mathbb{C}) \quad a + \infty = \infty + a = \infty.$
2. $(\forall b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}) \quad b \cdot \infty = \infty \cdot b = \infty.$
3. $\infty \cdot \infty = \infty.$
4. $(\forall a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}) \quad \frac{a}{0} = \infty.$
5. $(\forall b \in \mathbb{C}) \quad \frac{b}{\infty} = 0.$

(1) は「$\lim_{z \to c} f(z) = a,\ \lim_{z \to c} g(z) = \infty \Rightarrow \lim_{z \to c} (f(z) + g(z)) = \infty$」と解釈可能。

しかし、$\infty + \infty$ や $0 \cdot \infty$, $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$ は定義しない (つじつまが合うように定義出来ない)。

$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ は体ではなく、移項や消去などは気軽に出来ない。

実数の世界の ∞ と複素数の世界の ∞ は、(ふつう) 記号で見分けがつかないが違うものである。ここでは実数世界の ∞ は $+\infty$ と書く。

$I \subset \mathbb{R}$, $f\colon I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$ とする。$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ とは

$$(\forall R \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in I : |x-a| < \delta)\ f(x) > R.$$

実数の世界には、$-\infty$ もあって、これは $+\infty$ とは違うものである。
数直線で言うと、$+\infty$ は右の果て、$-\infty$ は左の果てである。
複素数の世界には、原点から果てしなく遠い点 ∞ が 1 個あるだけ。

$$+\infty \neq -\infty = (-1)\cdot(+\infty),$$

$$(-1)\cdot\infty = \infty$$

$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を作るように、$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ を作れる (杉浦 [2])。

2.1 1次分数変換の定義 (1) 定義する前の観察

$a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$ とするとき、$\dfrac{az+b}{cz+d}$ を考える。

(i) $c \neq 0$ のとき、$\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ で連続で

$$\lim_{z \to -d/c} \frac{az+b}{cz+d} = \infty, \quad \lim_{z \to \infty} \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c}.$$

(ii) $c = 0$ のとき、$\mathbb{C}$ で連続で

$$\lim_{z \to \infty} \frac{az+b}{cz+d} = \infty.$$

(注: $ad - bc \neq 0$ より、$ad \neq 0$. ゆえに $a \neq 0$ かつ $d \neq 0$ である。$-d/c$ と a/c が ∞ になる、と考えると分かりやすいかも。)

念のため復習　$\Omega \subset \mathbb{C}$, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $a \in \overline{\Omega}$, $A \in \mathbb{C}$ とする。

- $\displaystyle\lim_{z \to a} f(z) = \infty \Leftrightarrow (\forall R \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall z \in \Omega\colon |z-a| < \delta)\ |f(z)| > R.$
- $\displaystyle\lim_{z \to \infty} f(z) = A \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists R \in \mathbb{R})(\forall z \in \Omega\colon |z| > R)\ |f(z) - A| < \varepsilon.$

  (細かい注意: Ω 内の点列 $\{z_n\}$ で $\displaystyle\lim_{n \to \infty} |z_n| = +\infty$ となるものが存在すると仮定しておく。)

$a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$ とする。

(i) $c \neq 0$ のとき

$$\varphi(z) := \begin{cases} \dfrac{az+b}{cz+d} & (z \neq -d/c, \infty) \\ \infty & (z = -d/c) \\ \dfrac{a}{c} & (z = \infty) \end{cases}$$

(ii) $c = 0$ のとき

$$\varphi(z) := \begin{cases} \dfrac{az+b}{d} & (z \neq \infty) \\ \infty & (z = \infty) \end{cases}$$

で定められる $\varphi\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ を **1次分数変換**と呼ぶ。

以下、単に $\varphi(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ と表す。$\varphi(-d/c) = \infty$, $\varphi(\infty) = a/c$ と約束。

2.2 1次分数変換の性質 (1)

命題 13.1

任意の 1 次分数変換 $\varphi\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ は連続である。

証明 (の約束)

我々はまだ $\widehat{\mathbb{C}}$ に距離も位相も導入していない (それで連続性を議論するのは反則！)。しかし、任意の $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して $\lim_{z\to z_0} \varphi(z) = \varphi(z_0)$ が成り立つように色々なことをこの後に定義する (約束)。その約束が果たされれば連続であると証明される。 $\square$

2.2 1次分数変換の性質 (2) 行列と対応させる

複素数成分の、2次の正則行列の全体 (一般線型群) を $GL(2;\mathbb{C})$ と表す。

$$GL(2;\mathbb{C}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \ a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0 \right\}.$$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2;\mathbb{C})$ に対して、1次分数変換 φ_A を次式で定める。

$$\varphi_A(z) := \frac{az + b}{cz + d}$$

次が基本的である。

命題 13.2

1. $A, B \in GL(2;\mathbb{C})$ とするとき $\varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB}$.
2. $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して、$\varphi_I = \mathrm{id}_{\widehat{\mathbb{C}}}$ ($\widehat{\mathbb{C}}$ 上の恒等写像).
3. $A \in GL(2;\mathbb{C})$ ならば $\varphi_{A^{-1}} = (\varphi_A)^{-1}$.

1. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ に対して

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pa+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}.$$

$z \in \mathbb{C}$, $rz+s \neq 0$, $c\varphi_B(z)+d \neq 0$ とすると

$$\varphi_A \circ \varphi_B(z) = \varphi_A(\varphi_B(z)) = \varphi_A\left(\frac{pz+q}{rz+s}\right) = \frac{a\frac{pz+q}{rz+s}+b}{c\frac{pz+q}{rz+s}+d}$$
$$= \cdots \text{中略} \cdots = \frac{(ap+br)z+(aq+bs)}{(cp+dr)z+cq+ds} = \varphi_{AB}(z).$$

ゆえに有限個の点を除いて、$\varphi_A \circ \varphi_B$ と φ_{AB} は一致する。

$\varphi_A \circ \varphi_B$ と φ_{AB} は $\hat{\mathbb{C}}$ で連続であるから、$\hat{\mathbb{C}}$ 全体で一致する。

(もちろん有限個の例外点についてていねいに調べることでも証明出来る。そうすべきかもしれない。)

2.2 1次分数変換の性質 (3) 証明(続き), 系

2. $c = 0$ の場合に相当する。定義より $\varphi_I(z) = \begin{cases} z & (z \neq \infty) \\ \infty & (z = \infty) \end{cases}$. これは $\widehat{\mathbb{C}}$ の恒等写像である。
3. $A \in GL(2; \widehat{\mathbb{C}})$ のとき、A^{-1} が存在して、$A^{-1} \in GL(2; \mathbb{C})$. (1), (2) を用いると

$$\varphi_A \circ \varphi_{A^{-1}} = \varphi_{AA^{-1}} = \varphi_I = \mathrm{id}_{\widehat{\mathbb{C}}}.$$

同様にして $\varphi_{A^{-1}} \circ \varphi_A = \mathrm{id}_{\widehat{\mathbb{C}}}$. ゆえに $\varphi_{A^{-1}} = (\varphi_A)^{-1}$. □

系 13.3

任意の 1 次分数変換は全単射である。

証明.

(上の定理の (3) により、逆写像が存在することが分かるから。) □

2.3 平行移動, 定数倍, 反転 (1)

1. 平行移動 $b \in \mathbb{C}$ とする。

$$T_b(z) := z + b = \frac{1 \cdot z + b}{0 \cdot z + 1}.$$

2. 定数倍 $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とする。

$$M_a(z) := az = \frac{a \cdot z + 0}{0 \cdot z + 1}.$$

$a = re^{i\theta}$ $(r > 0,\ \theta \in \mathbb{R})$ とすると、M_a は、$z \mapsto rz$ (拡大または縮小) と $z \mapsto e^{i\theta} z$ (原点の周りの回転) の 2 つに分解できる。

3. **反転**

$$R(z) := \frac{1}{z} = \frac{0 \cdot z + 1}{1 \cdot z + 0}.$$

以上から、平行移動、定数倍、反転が 1 次分数変換であることが分かった。

命題 13.4

任意の 1 次分数変換は、平行移動、定数倍、反転の合成として表せる。

(どうやって証明する？)

証明.

(a) $c \neq 0$ の場合、部分分数分解により

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz+d} = -\frac{ad-bc}{c^2} \cdot \frac{1}{z+d/c} + \frac{a}{c}.$$

これは $T_{d/c}$, R, $M_{-\frac{ad-bc}{c^2}}$, $T_{a/c}$ を合成したものである。

(b) $c = 0$ の場合、

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{az+b}{d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}.$$

これは $M_{a/d}$, $T_{b/d}$ を合成したものである。

2.4 $\widehat{\mathbb{C}}$ の円 (1) 定義と方程式

$\widehat{\mathbb{C}}$ **の円**とは、普通の円と直線 (∞ を通る半径無限大の円と考える) の総称である。

$|\beta|^2 - ac \geq 0$ を満たす $a, c \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{C}$ を用いて

(1) $$az\overline{z} + \beta\overline{z} + \overline{\beta}z + c = 0$$

の形に表せるもの全体である。

気になる人には、以下のことを自分で確かめてもらおう。

問　複素平面内の任意の直線は、ある $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\beta \in \mathbb{R}$ を用いて

$$a\overline{z} + \overline{a}z + \beta = 0$$

と表せる (直線の方程式)。

問　複素平面内の任意の円は、ある $c \in \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \leq |c|^2$ を用いて、

$$z\overline{z} - c\overline{z} - \overline{c}z + \beta = 0$$

と表せる (円の方程式)。

命題 13.5 (円円対応)

任意の 1 次分数変換は、$\widehat{\mathbb{C}}$ の任意の円を $\widehat{\mathbb{C}}$ の円に写す。

証明.

平行移動で、直線は直線に、円は円に写される。
定数倍で、直線は直線に、円は円に写される。
反転 $R(z)=\frac{1}{z}$ でどうなるか調べる。$\widehat{\mathbb{C}}$ の円の方程式 (1) に、$z=R^{-1}(w)=\frac{1}{w}$ を代入すると

$$a\frac{1}{w}\overline{\left(\frac{1}{w}\right)}+\beta\overline{\left(\frac{1}{w}\right)}+\overline{\beta}\left(\frac{1}{w}\right)+c=0.$$

これは次式と同値である。

$$a+\beta w+\overline{\beta}\overline{w}+cw\overline{w}=0$$

$a':=c$, $\beta':=\overline{\beta}$, $c':=a$ とおくと

$$a'w\overline{w}+\beta'\overline{w}+\overline{\beta'}w+c'=0.$$

これは $\widehat{\mathbb{C}}$ の円を表している。実際 $|\beta'|^2-a'c'=|\beta|^2-ac\geq 0$. □

2.5 相異なる 3 点を相異なる 3 点に写す 1 次分数変換 (1)

補題 13.6 (相異なる 3 点を 1, 0, ∞ にうつす 1 次分数変換)

$\alpha, \beta, \gamma \in \widehat{\mathbb{C}}$ が相異なるならば

$$\varphi(\alpha) = 1, \quad \varphi(\beta) = 0, \quad \varphi(\gamma) = \infty$$

を満たす 1 次分数変換が一意的に存在する。

証明 (存在) α, β, $\gamma \in \mathbb{C}$ (3 つとも有限) の場合は

$$\varphi(z) := \frac{\alpha - \gamma}{\alpha - \beta} \cdot \frac{z - \beta}{z - \gamma}. \tag{2}$$

これが条件を満たすことは目視で確認できる。

(2) は自分で書けるようにしておくべき公式である (β で 0 より赤、γ で ∞ より青、最後に α で 1 となるように調節するためオレンジ)。

$\beta = \infty$ の場合は $\varphi(z) := \frac{\alpha-\gamma}{z-\gamma}$, $\gamma = \infty$ の場合は $\varphi(z) := \frac{z-\beta}{\alpha-\beta}$, $\alpha = \infty$ の場合は $\varphi(z) := \frac{z-\beta}{z-\gamma}$ とすればよい。

2.5 相異なる 3 点を相異なる 3 点に写す 1 次分数変換 (2)

(一意性) φ_1, φ_2 が条件を満たすならば、$\varphi := \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ も 1 次分数変換で

$$\varphi(1) = 1, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(\infty) = \infty.$$

$\varphi(\infty) = \infty$ より、ある a, b が存在して $\varphi(z) = az + b$.

$\varphi(0) = 0$ より、$b = 0$.

$\varphi(1) = 1$ より、$a = 1$.

ゆえに $\varphi(z) = z = \mathrm{id}_{\widehat{\mathbb{C}}}(z)$. すなわち $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} = \mathrm{id}_{\widehat{\mathbb{C}}}$.

φ_1 を右からかけて $\varphi_1 = \varphi_2$. □

2.5 相異なる 3 点を相異なる 3 点に写す 1 次分数変換 (3)

命題 13.7 (任意の 3 点を任意の 3 点に写せる)

$\alpha, \beta, \gamma \in \hat{\mathbb{C}}$ が相異なり、$\alpha', \beta', \gamma' \in \hat{\mathbb{C}}$ が相異なるならば、ある 1 次分数変換 φ が存在して

$$\varphi(\alpha) = \alpha', \quad \varphi(\beta) = \beta', \quad \varphi(\gamma) = \gamma'.$$

証明.

一般に α, β, γ を 1, 0, ∞ に写す 1 次分数変換を $\varphi_{\alpha,\beta,\gamma}$ と表すことにする (その存在は証明できた)。このとき

$$\varphi := \varphi_{\alpha',\beta',\gamma'}^{-1} \circ \varphi_{\alpha,\beta,\gamma}$$

は条件を満たす。 □

例題　1, 2, 3 を 2, 3, 1 に写す 1 次分数変換を求めよ。

(解答)　命題 13.7 の証明を実行する、というイメージの解答である。
$1, 2, 3$ を 1, 0, ∞ に写す 1 次分数変換は

$$\varphi_{1,2,3}(z) = \frac{1-3}{1-2}\cdot\frac{z-2}{z-3} = \frac{2z-4}{z-3}.\quad \text{対応する行列は} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

$2, 3, 1$ を 1, 0, ∞ に写す 1 次分数変換は

$$\varphi_{2,3,1}(z) = \frac{2-1}{2-3}\cdot\frac{z-3}{z-1} = \frac{-z+3}{z-1}.\quad \text{対応する行列は} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

求める 1 次分数変換に対応する行列は

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -13 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}.$$

ゆえに $\varphi(z) = \dfrac{5z-13}{3z-7}$. □

2.6 Riemann 球面の幾何学的イメージ (1) 立体射影

なぜ $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を Riemann 球面と呼ぶか。

$\widehat{\mathbb{C}}$ は $\mathbb{R}^3$ の球面と同一視できるから。

$$S := \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\}, \quad N := (0, 0, 1)$$

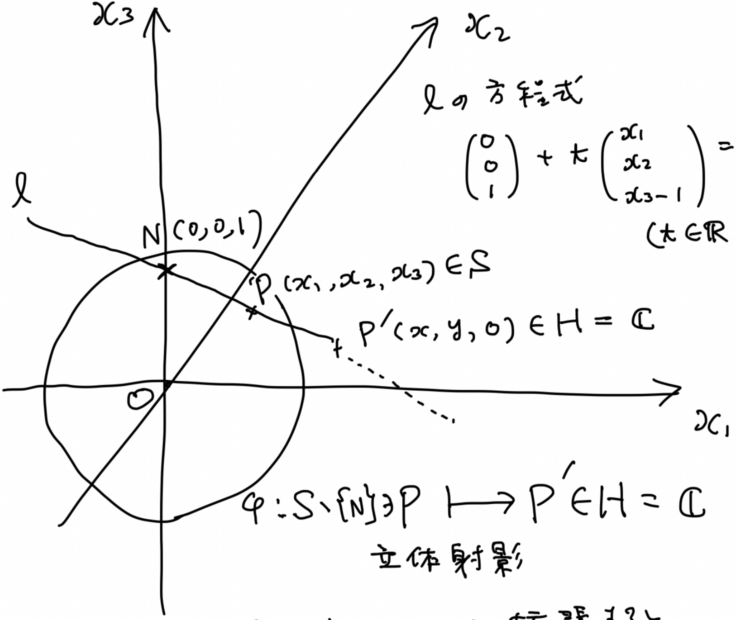
とおく。また x_1x_2 平面 $x_3 = 0$ を H で表し、複素平面 $\mathbb{C}$ と同一視する。すなわち $(x_1, x_2, 0) \in H$ に $x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}$ を対応させる。

任意の $P \in S \setminus \{N\}$ に対して、N と P を通る直線と、平面 H との交点 P' がただ一つ定まる。P に P' を対応させる写像

$$\varphi \colon S \setminus \{N\} \ni P \longmapsto P' \in H = \mathbb{C}$$

を、N からの**立体射影** (**stereographic projection**) と呼ぶ。

注　以下で、$\varphi(N) = \infty$ と定めることで、φ を S から $\widehat{\mathbb{C}}$ への写像に拡張する。その拡張した写像も**立体射影**と呼ばれる。



lの方程式

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}$$

$(t\in\mathbb{R})$

$$\varphi: S\setminus\{N\}\ni P\longmapsto P'\in H=\mathbb{C}$$

立体射影

$\varphi(N)=\infty$ と拡張すると

$$\varphi: S\to\mathbb{C}\cup\{\infty\}=\hat{\mathbb{C}}$$

問　$\varphi(x_1, x_2, x_3) = x + iy = (x, y, 0)$ とするとき、次式を示せ。

$$x = \frac{x_1}{1 - x_3}, \quad y = \frac{x_2}{1 - x_3} \quad \text{すなわち} \quad \varphi(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}.$$

(ヒント: 2 点 N, P を通る直線と、平面 $x_3 = 0$ との交点を求める。)

問　$\forall z \in \mathbb{C}$ に対して、$z = \varphi(x_1, x_2, x_3)$ は次のように解けることを示せ。

$$x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}, \quad x_1 = \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \quad x_2 = \frac{-i(z - \bar{z})}{|z|^2 + 1}.$$

(ヒント: $|z|^2 = \dfrac{1 + x_3}{1 - x_3}$ を導出した後、x_3, x_1, x_2 の順に求める。)

(逆写像が存在するので)

立体射影 $\varphi \colon S \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$ は全単射である。

$\displaystyle\lim_{P\to N}\varphi(P)=\infty$ である (幾何的直観でも明らか、式で示すのも簡単)。
そこで北極 N に対して ∞ を対応させることで、球面 S から $\hat{\mathbb{C}}$ への全単射な拡張が得られる。それを同じ φ で表す:

$$\varphi(x_1,x_2,x_3)=\begin{cases}\dfrac{x_1+ix_2}{1-x_3} & ((x_1,x_2,x_3)\in S\setminus\{N\})\\ \infty & ((x_1,x_2,x_3)=N=(0,0,1)).\end{cases}$$

元々は、S のことを Riemann 球面と呼び、φ によって $\hat{\mathbb{C}}$ を S と同一視することで、$\hat{\mathbb{C}}$ のことも Riemann 球面と呼ぶようになった。

問　次のことを確かめよ (幾何学的考察および計算の両方で)。

$$\varphi(\text{北半球})=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|>1\},\quad \varphi(\text{南半球})=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1\},$$
$$\varphi(\text{赤道})=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\},$$
$$\varphi(\text{北極})=\infty,\quad \varphi(\text{南極})=0.$$

2.7 Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ への位相の導入 (1)

点列の極限、関数の極限・連続性を定義するには、**位相**と呼ばれる構造 (開集合族) が必要になる。

$\widehat{\mathbb{C}}$ への位相の導入方法を 2 つ、駆け足 (証明は抜きで) で紹介する。どちらの方法でも同じ位相が得られる。

$\widehat{\mathbb{C}}$ への位相の導入 方法 1　一般に距離空間は位相空間となる (距離を用いて球を定義し、それから開集合を定義する)。$z_1, z_2 \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して

$$d(z_1, z_2) := \left\|\varphi^{-1}(z_1) - \varphi^{-1}(z_2)\right\| \quad (\|\ \| \text{ は } \mathbb{R}^3 \text{ のノルム})$$

とおくと、d は $\widehat{\mathbb{C}}$ 上の距離となる (これは簡単に確認できる)。
$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ のとき

$$d(z_1, z_2) = \frac{2\,|z_1 - z_2|}{\sqrt{\left(1 + |z_1|^2\right)\left(1 + |z_2|^2\right)}}.$$

図形イメージは鮮明だけれど、式の導出はちょっと面倒 (サボります)。

$\hat{\mathbb{C}}$ への位相の導入 方法 2 （一見ごちゃごちゃしているけれどオススメ）

位相を定めるには、開集合を定義する以外に、各点の**基本近傍系**を定める、というやり方がある。超駆け足で説明する。

X は空でない集合とし、X の各点 x に対して、X の部分集合族 $\mathcal{B}(x)$ が定まっていて、以下の条件 (**基本近傍系の公理**) を満たすとする。

1. $(\forall x \in X)\ \mathcal{B}(x) \neq \emptyset$. さらに $(\forall x \in X)\ (\forall U \in \mathcal{B}(x))\ x \in U$.
2. $(\forall x \in X)\ (\forall U, V \in \mathcal{B}(x))\ (\exists W \in \mathcal{B}(x))\ W \subset U \cap V$.
3. $(\forall x \in X)(\forall U \in \mathcal{B}(x))\ (\exists W \in \mathcal{B}(x))\ (\forall y \in W)\ (\exists U_y \in \mathcal{B}(y))\ U_y \subset U$.

このとき、X の部分集合 Ω について

$$\Omega \text{ は開集合} \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad (\forall x \in \Omega)(\exists U \in \mathcal{B}(x)) \quad U \subset \Omega$$

と定義すると、開集合の全体は**位相の公理**を満たす (位相空間のテキストを見よ)。

$\mathbb{C}$ においては、各 $a \in \mathbb{C}$ に対して、

$$\mathcal{B}(a) := \{U(a; r) \mid r > 0\}, \quad U(a; r) := D(a; r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$$

と定めると基本近傍系の公理が満たされ、それが定める位相は、通常の $\mathbb{C}$ の位相である。

新たに $\mathcal{B}(\infty)$ を定めて、$\mathcal{B}(a)$ $(a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\})$ が基本近傍系の公理を満たすことを確認すれば、$\hat{\mathbb{C}}$ の位相が定義できる。

$$\mathcal{B}(\infty) := \{U(\infty; R) \mid R \in (0, +\infty)\}, \quad U(\infty; R) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\} \cup \{\infty\}.$$

2.8 1 次分数変換は $\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への同相写像である

既に 1 次分数変換 φ は、$\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への全単射であり、逆写像も 1 次分数変換であること、任意の $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して $\lim_{z \to a} \varphi(z) = \varphi(a)$ が成り立つことは説明してある。

$\widehat{\mathbb{C}}$ に位相が定義できることが分かった (お話のみだったけど)。実は lim はその位相についての収束であることも分かる (方法 (2) で考えると簡単)。従って、φ も φ^{-1} も、$\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への連続写像である。

一般に写像 $\varphi \colon X \to Y$ が全単射であり、φ と φ^{-1} が共に連続であるとき、φ は**同相写像** (homeomorphism) であるといい、X と Y は**同相**であるという。

分かったことは次のように簡潔にまとめられる。

1 次分数変換は $\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への同相写像である。

実は、$\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への同相写像は 1 次分数変換に限る。
→ 1 次分数変換の重要性が分かる。

(このことの証明も、期末レポート課題の候補問題とする。)

参考文献

[1] 桂田祐史：続 複素関数論, 「複素関数」講義ノートの続き. http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/zoku-complex-function.pdf (2015 〜).

[2] 杉浦光夫：解析入門 I, 東京大学出版会 (1980), 詳しい (しばしば辞書的といわれる)。丸善 eBook では、https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000046843 でアクセスできる. この eBook まともな目次を付けてほしい.