

# 応用複素関数 第10回

## ～ ポテンシャル問題 (4) ～

かつらだ まさし  
桂田 祐史

2022年6月21日

# 目次

- ① 本日の内容・連絡事項
- ② ポテンシャル問題 (続き)
  - 弱解の方法
    - はじめに
    - Poisson 方程式の境界値問題 (P)
    - 弱定式化 (W) と変分問題 (V)
    - 3つの問題 (P), (W), (V) の同等性
    - (P) の解は (W) の解 — 弱形式の導出
    - (W) と (V) は同値
    - (W) の解が滑らかならば (P) の解
    - 補足 変分法の基本補題,  $C_0^\infty(\Omega)$
    - 定理の使い道
  - ポテンシャル問題の数値解法 (2) 基本解の方法
    - $-\Delta$  の基本解
    - 基本解の方法のアルゴリズム (電荷の作る電場の電位でポテンシャルを近似)
    - 基本解の方法の特徴
    - 数値等角写像に対する天野の方法
    - Jordan 領域の等角写像の計算プログラム
- ③ 参考文献

# 本日の内容・連絡事項

- レポート課題1の $\times$ 切 (6/25 23:00) が迫っています。何か理由があつて遅れそうな人は $\times$ 切前に連絡・相談して下さい。
- レポート課題2を出しました ( $\times$ 切 7/11)。それに必要な FreeFem++ のインストールを前回の授業で実演しましたが、「Macでの FreeFem++ のインストール作業メモ Version 4.11 の場合」という解説文を書いておきました。早めにインストールしておいて下さい。問題が生じた場合、早めに相談して下さい。
- 有限要素法は、弱解の方法を一つの基礎としている (もう一つは領域の三角形分割に基づく区分的多項式の利用)。そこで Poisson 方程式を題材として、**弱解の方法を解説**する。FreeFem++ のプログラムに必要な不可欠な**弱形式がどのように得られるか**、どういう意味を持つか、理解することを期待する。
- 6月20日の授業では、ここまでで時間切れとなった。「4.8 基本解の方法」は講義していないが、スライドには入れておく。

## 4.7 弱解の方法 4.7.1 はじめに

今回用いる有限要素法は、今では微分方程式論で常識となっている**弱解の方法** (weak formulation) を応用したものである。

これは、Riemann による、Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題を解くために用いた論法を発展させたものである。現在では様々な微分方程式に応用されているが、ここではもっとも基本的な Poisson 方程式の境界値問題について説明する (おおむね菊地 [1] に沿った解説)。

厳密に議論するには、**広義導関数**、いわゆる <sup>ソボレフ</sup>**Sobolev 空間** を導入する必要がある。具体的には、後で出て来る  $X_{g_1}$  と  $X$  は、本当は Sobolev 空間の一種  $H^1(\Omega)$  を用いて

$$X_{g_1} := \{w \in H^1(\Omega) \mid w = g_1 \text{ on } \Gamma_1\}, \quad X := \{w \in H^1(\Omega) \mid w = 0 \text{ on } \Gamma_1\}$$

と定義すべきものである。ともあれ、ここでは関数の滑らかさに関する議論には目をつぶって議論する。

(Sobolev 空間を学ぶときは、Brezis [2], [3] をチェックしてみよう。)

## 4.7.2 Poisson 方程式の境界値問題 (P)

Laplace 方程式を一般化した Poisson 方程式の境界値問題を考える。

$\Omega$  は  $\mathbb{R}^m$  ( $m = 2, 3$ ) の有界領域、 $\Gamma := \partial\Omega$  は  $\Omega$  の境界、 $\Gamma_1$  と  $\Gamma_2$  は

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma, \quad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$$

を満たす。また、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g_1: \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g_2: \Gamma_2 \rightarrow \mathbb{R}$  が与えられているとする。 $\Gamma_1 = \emptyset$  (全周 Neumann) のときは  $\int_{\Gamma_2} g_2 d\sigma = 0$  を仮定する。

問題 (P)

Find  $u$  s.t.

- (1)  $-\Delta u = f \quad (\text{in } \Omega),$
- (2)  $u = g_1 \quad (\text{on } \Gamma_1),$
- (3)  $\frac{\partial u}{\partial n} = g_2 \quad (\text{on } \Gamma_2).$

## 4.7.3 弱定式化 (W) と変分問題 (V)

$$X_{g_1} := \{w \mid w: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}, w = g_1 \text{ on } \Gamma_1\}, \quad X := \{w \mid w: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}, w = 0 \text{ on } \Gamma_1\},$$

$$(4) \quad J[w] := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx - \int_{\Omega} f w dx - \int_{\Gamma_2} g_2 w d\sigma \quad (w \in X_{g_1}).$$

とおく。 $X$  の要素はしばしば**試験関数** (test function) と呼ばれる。

次の2つの問題を考える。

(W)

Find  $u \in X_{g_1}$  s.t.

$$(5) \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_2} g_2 v d\sigma \quad (v \in X).$$

(条件 (5) を**弱形式** (weak form) と呼ぶ。)

(V)

Find  $u \in X_{g_1}$  s.t.

$$(6) \quad J[u] = \inf_{w \in X_{g_1}} J[w]. \quad (\text{inf は結局は min})$$

## 4.7.4 3つの問題 (P), (W), (V) の同等性

(P), (W), (V) は、ほぼ同値な問題である。実際、次が成り立つ。

### 定理 10.1

- ①  $u$  が (P) の解  $\Rightarrow u$  が (W) の解
- ②  $u$  が (W) の解  $\Leftrightarrow u$  が (V) の解
- ③  $u$  が (W) の解かつ  $u$  が  $C^2$  級  $\Rightarrow u$  が (P) の解

(授業では (2) の証明を省略した。そのため、次の補題も省略した。)  
(2) の証明のために補題を準備する (証明は単なる計算であるので省略する)。

### 補題 10.2

任意の  $w \in X_{g_1}$ ,  $v \in X$ ,  $t \in \mathbb{R}$  に対して次式が成立する。

$$(7) \quad J[w + tv] = \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + t \left( \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v dx - \int_{\Omega} f v dx - \int_{\Gamma_2} g_2 v d\sigma \right) + J[w].$$

## 4.7.5 (P) の解は (W) の解 — 弱形式の導出

### (1) の証明

$u$  が (P) の解と仮定する。(1)  $-\Delta u = f$  に任意の  $v \in X$  をかけて  $\Omega$  上で積分すると

$$(8) \quad - \int_{\Omega} \Delta u v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx.$$

左辺を Green の公式 ([4]) を用いて変形してから、 $v = 0$  (on  $\Gamma_1$ ) と (3)  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g_2$  を用いると

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \Delta u v \, dx &= - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v \, d\sigma + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \\ &= - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v \, d\sigma - \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v \, d\sigma + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \\ &= - \int_{\Gamma_2} g_2 v \, d\sigma + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx. \end{aligned}$$

(8) に代入して移項すると

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma_2} g_2 v \, d\sigma.$$

すなわち、 $u$  は弱形式を満たす ((W) の解である)。

□

## 4.7.6 (W) と (V) は同値

### (2) の証明

[ $u$  が (V) の解  $\Rightarrow u$  は (W) の解] (デジャブ? Dirichlet 原理の証明と似ている)  
 $u$  は (V) の解とする。任意の  $v \in X$  に対して、 $f(t) := J[u + tv]$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) とおくと、

$$f(t) = J[u + tv] \geq J[u] = f(0).$$

ゆえに  $f$  は  $t = 0$  で最小になる。ゆえに  $J[u + tv]$  の  $t$  の 1 次の項の係数は 0 である:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\Omega} f v \, dx - \int_{\Gamma_2} g_2 v \, d\sigma = 0.$$

ゆえに  $u$  は (W) の解である。 [ $u$  が (W) の解  $\Rightarrow u$  は (V) の解]

$u$  は (W) の解とする。任意の  $w \in X_{g_1}$  に対して、 $v := u - w$  とおくと  $v \in X$  である。

$$J[w] - J[u] = J[u + 1 \cdot v] - J[u] \quad (t = 1 \text{ として補題 10.2 を適用})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx + \left( \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\Omega} f v \, dx - \int_{\Gamma_2} g_2 v \, d\sigma \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx \geq 0. \end{aligned}$$

ゆえに  $J[u]$  は  $J[w]$  の最小値である。すなわち  $u$  は (V) の解である。 □

## 4.7.7 (W) の解が滑らかならば (P) の解

(3) の証明  $u$  が (W) の解であり、かつ十分滑らかと仮定する。(W) の解であるから、

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma_2} g v \, d\sigma \quad (v \in X)$$

を満たす。さらに滑らかであるので、左辺に Green の公式が適用できて

$$(*) \quad \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\sigma - \int_{\Omega} \Delta u v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma_2} g_2 v \, d\sigma \quad (v \in X).$$

特に  $v \in C_0^\infty(\Omega)$  の場合を考えると (境界上の積分が 0 なので)

$$- \int_{\Omega} \Delta u v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad (v \in C_0^\infty(\Omega)).$$

変分法の基本補題より

$$-\Delta u = f \quad (\text{in } \Omega).$$

これを (\*) に代入すると

$$\int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\sigma = \int_{\Gamma_2} g_2 v \, d\sigma \quad (v \in X).$$

再び変分法の基本補題より、 $\frac{\partial u}{\partial n} = g_2$  (on  $\Gamma_2$ ). ゆえに  $u$  は (P) の解である。証明終  
……以上、Dirichlet 原理の一般化

## 4.7.8 補足 変分法の基本補題

「任意の」(実際には「何かの条件を満たすすべての」)関数  $\varphi$  について  $\int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx = 0$  が成り立つならば、 $f = 0$  (in  $\Omega$ ), という形の命題を**変分法の基本補題** (fundamental lemma of calculus of variations) という。

色々なバージョンがあるが、次の形のもので用が足りることが多い。

### 命題 10.3 (変分法の基本補題)

$\Omega$  は  $\mathbb{R}^n$  の開集合、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  は局所可積分関数で

$$(\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)) \quad \int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx = 0$$

を満たすならば

$$f = 0 \quad (\text{a.e. on } \Omega).$$

$\Omega$  で局所可積分とは、 $\Omega$  に含まれる任意のコンパクト集合上で Lebesgue 積分可能ということ。

$f = 0$  (a.e on  $\Omega$ ) とは、 $\Omega$  に含まれるある測度 0 の集合  $N$  を除いて  $f = 0$  ということ。  
 $C_0^\infty(\Omega)$  については、次のページで説明する。

## 4.7.8 補足 $C_0^\infty(\Omega)$

$C_0^\infty(\Omega)$  という記号は、解析学で頻出する (知っておくと良い)。

$\Omega$  を  $\mathbb{R}^n$  の開集合とするとき、 $C_0^\infty(\Omega)$  を

$$C_0^\infty(\Omega) := \{v \in C^\infty(\Omega) \mid \text{supp } v \text{ はコンパクトで、} \Omega \text{ に含まれる}\}$$

で定める。ここで  $\text{supp } v$  は  $v$  の台 (the support of  $v$ ) と呼ばれる集合で、次式で定められる。

$$\text{supp } v := \overline{\{x \in \Omega \mid v(x) \neq 0\}}.$$

ここで  $\overline{\quad}$  は、 $\mathbb{R}^n$  における閉包を意味する。

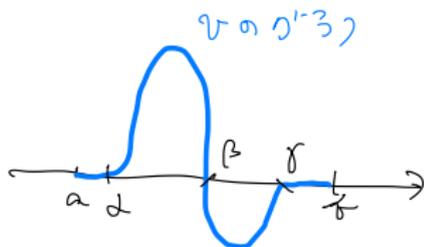
コンパクトとは、 $\mathbb{R}^n$  の部分集合  $K$  については、 $K$  が有界な閉集合ということである。

$v \in C_0^\infty(\Omega)$  とは、 $v$  が  $C^\infty$  級で、 $\partial\Omega$  のある近傍では  $v = 0$  を満たすことを意味する。

# 4.7.8 補足 $C_0^\infty(\Omega)$

$\text{supp } v \subset \Omega$  である必要がある。

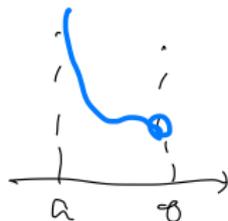
$$\Omega = (a, b) \quad \text{とすると}$$



$$\{x \in \Omega \mid v(x) \neq 0\} = (\alpha, \beta) \cup (\beta, \gamma)$$

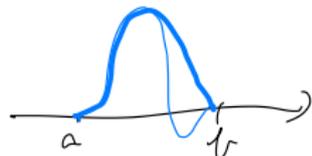
$$\text{supp } v = [\alpha, \beta] \cup [\beta, \gamma] \subset \Omega$$

$$\therefore v \in C_0^\infty(\Omega)$$



$$\text{supp } v = [a, b] \not\subset \Omega$$

$$\therefore v \notin C_0^\infty(\Omega)$$



$$\text{supp } v = [a, b]$$

$$\partial\Omega = \{a, b\} \text{ の付近で } v \neq 0$$

## 4.7.9 定理の使い道

(P) の解を求めたり、一意的な存在を示したいわけであるが、代わりに (W) (あるいは (V)) を考える。

(W) の解の一意的な存在を示すのは比較的容易である。また (W) の近似解を求めるのも簡単である (有限要素法がまさにそれをしてくれる)。

(W) の解が本当に (P) の解であるか? が問題になる。言い換えると

**(W) の解  $u$  は滑らかだろうか?**

この問は、一見細かいことのようにだが、**実はとても重要である。**

良く知られた (部分的な) 解答

- $\Omega$  が  $C^2$  級であれば (どういう意味?) Yes.
- $\Omega$  が多角形の場合、凸ならば Yes, 凸でないならば一般には No.

(FreeFem++ の例で、**L字型の領域**や、**立方体から小さい立方体を除いた領域**がしばしば登場するが、このあたりのこと (**領域の凸性**) を問題にしているわけである。)

2022/6/20 の授業は、4.7 の説明までで終わりました。

次回以降に、以下の 4.8 を講義するかどうかは、まだ決めていません。

## 4.8 ポテンシャル問題の数値解法 (2) 基本解の方法

### 4.8.1 $-\Delta$ の基本解

次の関数  $E$  は、 $-\Delta$  の**基本解** (fundamental solution) と呼ばれる。

$$(9) \quad E(x) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log|x| & (2 \text{次元の場合}, x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \\ \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x|} & (3 \text{次元の場合}, x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}). \end{cases}$$

一体何者か？

**数学的な解答** 次を満たす。ここで  $\delta$  は **Dirac のデルタ超関数**。

$$(10) \quad -\Delta E = \delta \quad (\Delta \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}).$$

**物理的な解答 (解釈)**  $E$  は**原点に置かれた単位点電荷の作る電場のポテンシャル (電位)** である。

(Cf. 密度  $\rho$  で分布する場合のポテンシャル  $u$  は  $-\Delta u = \rho$  を満たす。)

## 4.8.1 $-\Delta$ の基本解

なぜ基本解は重要か？重ね合わせることで“任意”の電荷分布  $\rho$  のポテンシャルが得られる。

### 定理 (のようなもの) Poisson 方程式の特解

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\rho: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  が与えられたとき

$$(11) \quad u(x) := \int_{\Omega} E(x-y)\rho(y) dy \quad (x \in \Omega)$$

とおくと次式が成り立つ。

$$(12) \quad -\Delta u = \rho \quad (\text{in } \Omega).$$

$E$  には特異性があるので、(12) を証明するのは少し難しい (神保 [5] など)。物理的には次のように納得できる。

微小体積  $dy$  に存在する電荷は  $\rho(y) dy$  で、それが作る電場のポテンシャルは (基本解を平行移動したものの電荷量倍で)  $E(x-y)\rho(y) dy$ . それを  $\Omega$  全体でトータルした  $u$  がポテンシャルになる。実際、 $\mathbf{E} := -\text{grad } u$  は電場で、Maxwell の方程式の 1 つ  $\text{div } \mathbf{E} = \rho$  から、 $-\text{div grad } u = \rho$  が得られる。すなわち (12) が成り立つ。

## 4.8.2 基本解の方法のアルゴリズム (電荷の作る電場の電位でポテンシャルを近似)

ポテンシャル問題の数値解法 (近似解法) への応用「**基本解の方法 (the method of fundamental solutions)**」を紹介する。

Dirichlet 境界値問題を考えよう (Neumann 境界値問題でも同様)。

$$(13) \quad \Delta u = 0 \quad (\text{in } \Omega)$$

$$(14) \quad u = g \quad (\text{on } \partial\Omega).$$

ここで  $\Omega$  は  $\mathbb{R}^n$  ( $n = 2$  or  $n = 3$ ) の領域である。

$\Omega$  の外部に、 $\Omega$  を取り囲むように、有限個の点  $y_1, \dots, y_N$  を取り、各  $y_k$  に電荷量  $Q_k$  の電荷を置く。

## 4.8.2 アルゴリズム (電荷の作る電場の電位でポテンシャルを近似)

それらの電荷の作る電場のポテンシャルは

$$(15) \quad u^{(N)}(x) := \sum_{k=1}^N Q_k E(x - y_k).$$

$\Delta E = 0$  (in  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ) であるから、 $Q_k$  の取り方によらず

$$\Delta u^{(N)}(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n \setminus \{y_1, \dots, y_N\}). \quad \text{特に} \quad \Delta u^{(N)} = 0 \quad (\text{in } \Omega).$$

後は  $Q_k$  をうまく選んで、境界条件 (14)  $u = g$  (on  $\partial\Omega$ ) を近似的に満たすようにする。

一つのやり方として、 $\partial\Omega$  上に  $N$  個の点  $x_1, \dots, x_N$  を取って

$$(16) \quad u^{(N)}(x_j) = g(x_j) \quad (j = 1, \dots, N).$$

これで  $Q_k$  ( $k = 1, \dots, N$ ) が定まることはすぐ分かる (次のスライド)。

非常に素朴な感じがするが、とてもうまく行くことが多い。

## 4.8.2 アルゴリズム (電荷の作る電場の電位でポテンシャルを近似)

(16) は次の連立1次方程式と同値である。

$$\begin{pmatrix} E(x_1 - y_1) & E(x_1 - y_2) & \cdots & E(x_1 - y_N) \\ E(x_2 - y_1) & E(x_2 - y_2) & & E(x_2 - y_N) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ E(x_N - y_1) & E(x_N - y_2) & \cdots & E(x_N - y_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(x_1) \\ g(x_2) \\ \vdots \\ g(x_N) \end{pmatrix}.$$

Gauss の消去法などを用いて、 $Q_k$  ( $k = 1, \dots, N$ ) が求められる。

(いわゆる密行列であるが、それほど大きな  $N$  は必要ないので、難しくない。)

## 4.8.3 基本解の方法の特徴

- ① ある  $\rho$  ( $0 < \rho < 1$ ),  $C$  が存在して

$$\|u - u^{(N)}\| \leq C\rho^N \quad (\|\cdot\| \text{ は適当なノルム})$$

が成り立つ (誤差の指数関数的減少, 次のスライドで数値例を示す)。しばしば、高精度の解が非常に少ない計算量で得られることが期待できる。

Cf. 差分法, 有限要素法では、典型的な場合に  $\|u - u^{(N)}\| \leq \frac{C}{N^2}$ .

- ②  $u^{(N)}$  は調和関数である。特に  $\text{grad } u^{(N)}$  の計算が簡単:

$$\text{grad } u^{(N)}(x) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N Q_k \frac{x - y_k}{|x - y_k|^2} \quad (2 \text{次元の場合}).$$

(例えばポテンシャル流の計算を思い浮かべると、超便利と分かる。)

しかも  $\|\text{grad } u - \text{grad } u^{(N)}\|$  も指数関数的に減少する。

Cf. 差分法や有限要素法では、微分が難しかったり、精度が下がったりする。

- ③ 理論的な基礎づけは、差分法、有限要素法と比べて不十分である。  
④ 同次方程式にしか適用できない、具体的な基本解が必要 → 汎用性は低い。

汎用性低いが、使えるときは、差分法・有限要素法に性能で勝る場合が多い。

## 4.8.3 基本解の方法の特徴 数値例

$\Omega$  が円盤  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |\mathbf{x}| < 1\}$  の場合に、原点中心半径  $R = 2$  の円周上に一様に電荷点  $y_k$  を配置した場合の近似解の精度を示す。

左が  $g(\mathbf{x}) = \text{Re}[(x + iy)^m]$ , 右が  $g(\mathbf{x}) = \log|\mathbf{x} - \mathbf{p}|$  ( $\mathbf{p} = (p, 0)$ ) の場合。

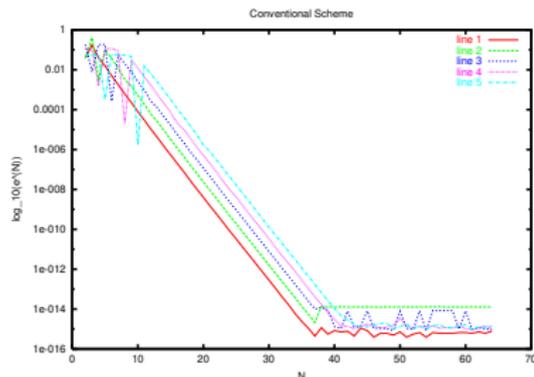


図 1:  $m = 1, \dots, 5$

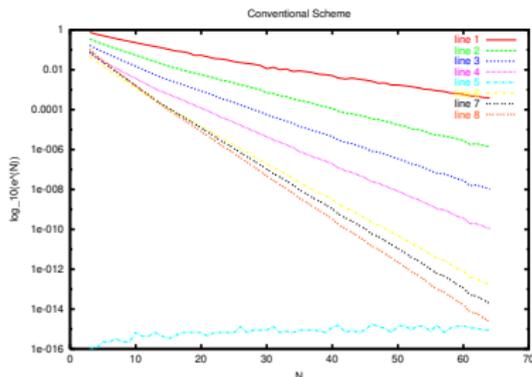


図 2:  $p = 1.2, 1.4, \dots, 2.6$ .  $p$  が大きい (特異点が遠い) ほど速く減衰

**誤差の減少は非常に速い!**

片側対数目盛で、直線上にのることから、誤差が指数関数的に減少している。減少の速さについては研究されていて、ある程度まで説明可能である。

## 4.8.4 数値等角写像に対する天野の方法

天野要は、§4.4 で述べた等角写像の求め方 (定理 8.6) と、基本解の方法を組み合わせた、数値等角写像 (領域の写像関数を数値的に求めること) の効率的なアルゴリズムを提唱した (天野 [6])。それを解説する。

§4.4 で導入した記号を用いる。

$u$  の近似  $u^{(N)}$  を基本解の方法で求めよう。 $N \in \mathbb{N}$  に対して、 $\{\zeta_k\}_{k=1}^N$  を「 $\Omega$  を取り囲むように」 $\mathbb{C} \setminus \bar{\Omega}$  から選び、

$$(17) \quad u^{(N)}(z) := \sum_{k=1}^N Q_k \log |z - \zeta_k|$$

とおく。ここで  $Q_k$  ( $k = 1, \dots, N$ ) は未知の実定数である。

$\{z_j\}_{j=1}^N$  を  $\partial\Omega$  から選び、連立 1 次方程式

$$(18) \quad u^{(N)}(z_j) = -\log |z_j - z_0| \quad (j = 1, \dots, N)$$

を解いて  $Q_k$  ( $k = 1, \dots, N$ ) が求められる。

## 4.8.4 数値等角写像に対する天野の方法

$u^{(N)}$  の共役調和関数  $v^{(N)}$  を求めたい ( $u^{(N)}$  を実部に持つ正則関数を求めたい)。天下りになるが、

$$(19) \quad f^{(N)}(z) := Q_0 + \sum_{k=1}^N Q_k \operatorname{Log} \frac{z - \zeta_k}{z_0 - \zeta_k}, \quad Q_0 := \sum_{k=1}^N Q_k \log |z_0 - \zeta_k|$$

とおく。ここで  $\operatorname{Log}$  は主値を表すとする ( $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  を定義域とする)。

$$\operatorname{Re} f^{(N)}(z) = \sum_{k=1}^N Q_k \log |z_0 - \zeta_k| + \sum_{k=1}^N Q_k \log \left| \frac{z - \zeta_k}{z_0 - \zeta_k} \right| = \sum_{k=1}^N Q_k \log |z - \zeta_k| = u^{(N)}(z)$$

である。さらに

$$f^{(N)}(z_0) = Q_0 + \sum_{k=1}^N Q_k \operatorname{Log} \frac{z_0 - \zeta_k}{z_0 - \zeta_k} = Q_0 + \sum_{k=1}^N 0 = Q_0 \in \mathbb{R}.$$

言い換えると  $\operatorname{Im} f^{(N)}(z_0) = 0$ 。この  $f^{(N)}$  は、 $f = u + iv$  の良い近似であると考えられる。

## 4.8.4 数値等角写像に対する天野の方法

以上をまとめると、次のアルゴリズムが得られる。

$$(再掲 17) \quad u^{(N)}(z) := \sum_{k=1}^N Q_k \log |z - \zeta_k|,$$

$$(再掲 18) \quad u^{(N)}(z_j) = -\log |z_j - z_0| \quad (j = 1, \dots, N),$$

$$(再掲 19) \quad f^{(N)}(z) := Q_0 + \sum_{k=1}^N Q_k \operatorname{Log} \frac{z - \zeta_k}{z_0 - \zeta_k}, \quad Q_0 := \sum_{k=1}^N Q_k \log |z_0 - \zeta_k|$$

### 天野のアルゴリズム

- ①  $\{\zeta_k\}_{k=1}^N \subset \mathbb{C} \setminus \bar{\Omega}$ ,  $\{z_j\}_{j=1}^N \subset \partial\Omega$  を適当に選ぶ。
- ② (17), (18) で  $\{Q_k\}$  を求める。
- ③ (19) で  $f^{(N)}$  を定める。
- ④  $\varphi^{(N)}(z) := (z - z_0) \exp f^{(N)}(z)$  で定義される  $\varphi^{(N)}$  を、等角写像  $\varphi: \Omega \rightarrow D_1$  の近似として採用する。

## 4.8.5 Jordan 領域の等角写像の計算プログラム

以下の Python プログラム `conformalmap-v2.py` では

$$\Omega = D_1 \stackrel{\text{def.}}{=} \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}, \quad z_0 = \frac{1}{2}$$

の場合の  $\Omega$  の写像関数、すなわち双正則な  $\varphi: \Omega \rightarrow D_1$  で

$$\varphi(z_0) = 0, \quad \varphi'(z_0) > 0$$

を満たすものを求める。この場合、実は次の 1 次分数変換が解である。

$$\varphi(z) = \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}.$$

プログラム入手 — ターミナルで次を実行 —

```
curl -O http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/conformalmap-v2.py
```

ターミナルで次のように実行 —

```
python conformalmap-v2.py
```

## 4.8.5 Jordan 領域の等角写像の計算プログラム

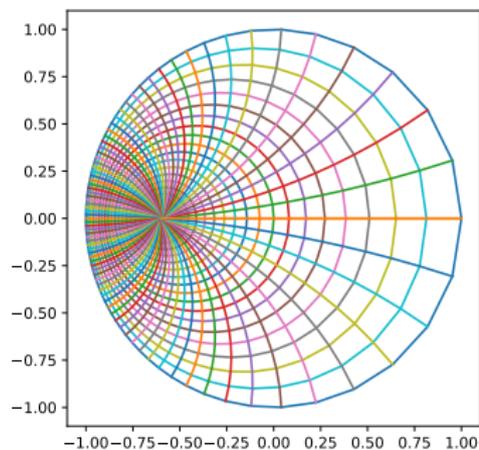


図 3:  $z_0 = 0.6$  の場合.  $w = \varphi(z)$  による  $z$  平面の原点中心の同心円、単位円の半径の像を描いた。

# 参考文献

- [1] 菊地文雄：有限要素法概説, サイエンス社 (1980), 新訂版 1999.
- [2] Brezis, H.: 関数解析, 産業図書 (1988), (藤田 宏, 小西 芳雄 訳), 原著は版を改めて、より内容豊富になっています。
- [3] Brezis, H.: *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer (2011).
- [4] 桂田祐史：ベクトル解析早見表, [http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/applied-complex-function-2021/vector\\_analysis.pdf](http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/applied-complex-function-2021/vector_analysis.pdf) (2021/5/31).
- [5] 神保秀一：偏微分方程式入門, 共立出版 (2006).
- [6] 天野 <sup>かなめ</sup> 要：代用電荷法に基づく等角写像の数値計算法, 情報処理学会論文誌, Vol. 28, No. 27, pp. 697–704 (1987).