応用複素関数 第 9 回

～ ポテンシャル問題 (3) ～

桂田 祐史（かつらだ まさし）

2022 年 6 月 14 日

目次

本日の内容・連絡事項

- 有限要素法は、弱解の方法を一つの基礎としている (もう一つは領域の三角形分割に基づく区分的多項式の利用)。そこで Poisson 方程式を題材として、**弱解の方法を解説**する。FreeFem++ のプログラムに必要不可欠な**弱形式がどのように得られるか**、どういう意味を持つか、理解することを期待する。
- FreeFem++ はこの機会にぜひ体験してもらいたい (非常に幅広い応用がある)。インストールやサンプル・プログラムの実行でつっかえたら質問して下さい。
- レポート課題 2 を出します。締め切りは 7 月 11 日 (月) 22:00。

  `http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/report2.pdf`

(今回の内容はきちんとやるのは大変だけど、分かるところだけでも栄養たっぷり。)

桂田 [1] が参考になります (ほぼ講義ノート))。

4.5 Dirichlet の原理

Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題

(1a) $$\triangle u = 0 \quad (\text{in } \Omega),$$

(1b) $$u = g \quad (\text{on } \partial\Omega)$$

の解 u の存在を示すため、Riemann は次のように考えた。

境界条件 (1b) を満たす関数の全体 X と、X 上の汎関数 J を考える。

$$X := \left\{ u \;\middle|\; u \colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R},\ (\forall x \in \partial\Omega)\ u(x) = g(x) \right\}.$$

$$J[u] := \iint_\Omega \left(u_x^2 + u_y^2 \right) dx\, dy \quad (u \in X).$$

Dirichlet の原理

J の最小値を与える u は $\triangle u = 0$ (in Ω) を満たす。

したがって J の最小値を与える u は (1a), (1b) の解である。

Riemann (1826–1866) は、Dirichlet (1805–1859) 先生の講義の中で Dirichlet の原理を聴いたそうである。

証明

$v\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ は、$v = 0$ (on $\partial\Omega$) を満たす任意の関数とする。任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $u + tv \in X$ である。仮定より

$$f(t) := J[u + tv] \quad (t \in \mathbb{R})$$

は $t = 0$ で最小値をとる。ところが

$$f(t) = J[u] + 2t \iint_\Omega (u_x v_x + u_y v_y) dx\,dy + t^2 \iint_\Omega \left(v_x^2 + v_y^2\right) dx\,dy$$

は t の 2 次関数であり、$t = 0$ で最小となるので、1 次の係数は 0 である:

$$\iint_\Omega (u_x v_x + u_y v_y)\,dx\,dy = 0. \tag{2}$$

Green の公式 $\left(\iint_\Omega \triangle u v\ dx\,dy = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v\ d\sigma - \iint_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\ dx\,dy\right)$ より

$$\iint_\Omega \triangle u\, v\ dx\,dy = 0.$$

これが任意の v について成り立つことから (**変分法の基本補題により**)

$$\triangle u = 0 \quad (\text{in } \Omega). \qquad \square$$

Riemann は、汎関数 $J[u]$ を最小にする $u \in X$ の存在は明らかだと考えた。

J は下に有界 ($J[u] \geq 0$) であるから、J は下限を持つ。それは最小値のはず…

それに Weierstrass が疑義を呈した (「下限は本当に最小値？」とツッコミを入れた)。これに Riemann は存命中に答えられなかった。

現代的な解説をすると、関数空間は無限次元空間なので、有界閉集合上の連続関数であっても、最小値を持たないことがありえる。

ポテンシャル問題は重要なため、解の存在について、多くの人が努力して Dirichlet 原理を用いない証明がいくつか発見されたが、Riemann の発表から約 50 年後 (1900 年頃)、D. Hilbert が Dirichlet 原理に基づく証明を発表し、肯定的に解決した。

今では解の存在証明は、このルートをたどるのがスタンダードになっている。…でも応用複素関数としては、ここから数値計算法に舵を切る (存在証明については、関数解析か偏微分方程式論で学んでください)。

4.6 ポテンシャル問題の数値解法 (1) 有限要素法

ポテンシャル問題を数値的に解くことを考えよう。この「応用複素関数」では、**有限要素法**と**基本解の方法**を簡単に紹介する。

差分法で解くこともできるが、長方形領域でない問題を解くには工夫が必要になり、あまり便利でない。

有限要素法の主たるアイディアは次の 2 つ:

1. **弱形式**を用いる。
2. 領域を三角形、四面体などの**有限要素**に分割し、近似解や試験関数に**区分的多項式**を採用する。

この講義では有限要素法の詳細は解説できないが、幸い **FreeFem++** というソフトを用いると、弱形式さえ分かれば、有限要素についてはソフトに任せにして、数値計算ができる。

実は Dirichlet 原理の証明中に現れた (2) は Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題の弱形式である。(弱形式については、次回解説を行う。)

今回は「百聞は一見にしかず」で、 まずはプログラム (スライド 1 枚) を紹介する。
2,3 行書き換えるだけで「自分の問題」が解ける。

```
// potential2d-v0.edp ---  2次元非圧縮ポテンシャル流
//  速度ポテンシャル, 速度を求め、等ポテンシャル線, 速度場を描く
border Gamma(t=0,2*pi) { x = cos(t); y = sin(t); } // 円盤領域
int m=40;
mesh Th=buildmesh(Gamma(m));
plot(Th, wait=1, ps="Th.eps");
// 次の2行は区分1次多項式を使うという意味
fespace Vh(Th,P1);
Vh phi, v, v1, v2;
// 境界条件の設定
func Vn=x+2*y; // Ωが単位円で, V=(1,2) のとき V・n=x+2y

// 速度ポテンシャルφを求め、その等高線 (等ポテンシャル線) を描く
solve Laplace(phi,v) =
  int2d(Th)(dx(phi)*dx(v)+dy(phi)*dy(v)) -int1d(Th,Gamma)(Vn*v);
plot(phi,ps="contourpotential.eps",wait=1);
// ベクトル場 (v1,v2)=∇φ を描く (ちょっと雑なやり方)
v1=dx(phi); v2=dy(phi);
plot([v1,v2],ps="vectorfield.eps",wait=1);

// 等ポテンシャル線とベクトル場を同時に描く
plot([v1,v2],phi,ps="both.eps", wait=1);
```

1. **FreeFem++ の WWW サイト**
   分厚い事例集 (マニュアル?) Hecht [2] がある。
2. インストールは、FreeFem-sources Releases から
   FreeFEM-4.11-MacOS-10.15-intel-c.dmg あるいは
   FreeFEM-4.11-Apple-M1-f.dmg を入手して、ダブルクリックしてから

ターミナルで

```
cd /Volumes/FreeF*4.11*
./Install-app.sh
(パスワードを入力)
cd -
```

FreeFem++ を体験しよう　サンプル・プログラム

FreeFem++ がインストールできたら、ターミナルを新しく開いて、以下の 4 つのコマンドを順番に実行して下さい。

```
curl -O http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/potential2d-v0.edp
FreeFem++ potential2d-v0.edp

curl -O http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/program/freefem/poisson.edp
FreeFem++ poisson.edp
```

FreeFem++ では、`plot()` 実行後に一時停止することがあります (グラフィックスを見てもらうため)。次のプロットへ進むには [Enter]、グラフィックスを閉じるには [esc] を入力します。

FreeFem++ のインストールや、サンプル・プログラムの実行については、気軽に質問して下さい。

- 分厚い事例集 (マニュアル?) Hecht [2] がある。
一度入手してパラパラしてみると、どういうことが出来るか分かる。
- 大塚・高石, 有限要素法で学ぶ現象と数理 — FreeFem++ 数理思考プログラミング —, 共立出版 (2014) ([3])
丸善 eBook に入っていて、明治大学の学生はオンラインで読める。
- 「有限要素法と FreeFem++」
(FreeFem++ の簡単な紹介と 2 つのサンプルプログラムの紹介)
- 「FreeFem++ の紹介」(ずっと前に書いた紹介文。役目は終えたかも。)

日本語の書籍は大塚・高石 [3] しかありませんが、最近は WWW 上 に日本語の解説が増えて来て、その多くは信頼できます。

レポート課題2について

非圧縮流体のポテンシャル流を、ポテンシャル問題を解くことで数値シミュレーションする、という問題で、課題文は http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/report2.pdf にあります。

FreeFem++ 用のサンプル・プログラムをたたき台にすれば、プログラム作成の手間は軽くて済む (弱形式はサンプル・プログラムのままで良い)。

やるべきこと (1) 領域 Ω と境界値 $v_n = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}$ を選ぶ。

Ω はかなり自由に選べる (大学名にちなみ M の字の領域にするとか)。

v_n の選び方に注意が必要である。すでに説明したように

$$\int_{\partial\Omega} v_n \, d\sigma = 0 \quad (\text{今は 2 次元なので線積分です})$$

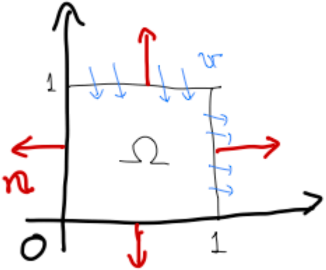
が成り立っていないと解が存在しない。実際 Green の積分公式

$$\int_{\Omega} \triangle u v \, d\boldsymbol{x} = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\sigma - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\boldsymbol{x}$$

の u に ϕ, v に 1 (定数関数) を代入すると ($\triangle\phi = 0$, $\frac{\partial \phi}{\partial n} = v_n$ に注意して)

$$0 = \int_{\partial\Omega} v_n \, d\sigma - 0$$

が得られるから。



上の辺から水を入れる。

右の辺から水を出す。

$$v_n = v \cdot n = \begin{cases} -1 & (上の辺) \\ 1 & (右の辺) \\ 0 & (その他の辺) \end{cases}$$

$\int_{\partial\Omega} v_n \, d\sigma = 0$ であることが必要

上の v_n では $\int_{\partial\Omega} v_n \, d\sigma = \int_{上の辺} (-1) \, d\sigma + \int_{右の辺} 1 \, d\sigma = 0$

正方形でなく長方形(横2, 縦1)にしたら v_n を変えないとダメ

レポート課題2について

やるべきこと (2) 流線を描くこと

流線を描くにはどうすればよいか。これはサンプル・プログラムには書かれていない。

流線は、接線ベクトルが速度ベクトルと平行であるような曲線 (これが流線の定義) ということから求める方法が考えられる。

あるいは、2 次元流体では、流線は流れ関数 ψ の等高線であるから、ψ を求めてその等高線を描く、という手もある。ψ を求めるには…

参考文献

[1] 桂田祐史：ポテンシャル問題の数値計算, `http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/potential.pdf` (2017).

[2] Hecht, F.: Freefem++, `https://doc.freefem.org/pdf/FreeFEM-documentation.pdf`, 以前は `http://www3.freefem.org/ff++/ftp/freefem++doc.pdf` にあった。

[3] 大塚厚二, 高石武史：有限要素法で学ぶ現象と数理 — FreeFem++数理思考プログラミング —, 共立出版 (2014), `http://comfos.org/jp/ffempp/book/` というサポート WWW サイトがある．Maruze eBook に入っているので、 `https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000018545` でアクセス出来る．