応用複素関数 第 8 回

〜 ポテンシャル問題 (2) 〜

かつらだ まさし
桂田 祐史

2022 年 6 月 7 日

目次

本日の内容・連絡事項

- **ポテンシャル問題** (Laplace 方程式の境界値問題) の 2 回目。
  - 「同型」の概念の説明をする (スライドはまだ用意していない、後から追加予定)。
  - 関数論で基本的な **Riemann の写像定理** (領域の写像関数の存在定理) を紹介する。
  - 特に Jordan 領域の場合、写像関数はポテシャル問題を解くことで求まる。

4.3 Riemann の写像定理

関数論で基本的な Riemann の写像定理を説明する。

定義 8.1 (双正則)

U と V は $\mathbb{C}$ の領域, $\varphi\colon U \to V$ とする。φ が**双正則**であるとは、φ が正則かつ全単射かつ φ^{-1} も正則であることをいう。

数学では、しばしば同型写像, 同型という概念が登場する。双正則写像は関数論としての同型写像と言える。

定理 8.2 (Riemann の写像定理, 1851 年)

Ω は $\mathbb{C}$ の単連結領域で、$\Omega \neq \mathbb{C}$ であるとする。このとき双正則写像 $\varphi\colon \Omega \to D(0;1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ が存在する。

証明は省略する (例えば Ahlfors [1], 高橋 [2] を見よ)。

φ のことを、**領域 Ω の等角写像**、あるいは**領域 Ω の写像関数**と呼ぶ。

いくつか簡単な形の領域の写像関数を、1 次分数変換で具体的に求め…今年度は説明の順番の都合でまだやっていない。

$\mathbb{C}$ の単連結領域で $\mathbb{C}$ と異なるものは、関数論的には円盤領域と同型である、ということになる。

系 8.3

$\mathbb{C}$ 内の単連結領域で $\mathbb{C}$ とは異なるものは互いに同相 (位相同型) である。

証明

Ω_1, Ω_2 が $\mathbb{C}$ とは異なる $\mathbb{C}$ の単連結領域とすると、双正則写像 $\varphi_1\colon \Omega_1 \to D(0;1)$, $\varphi_2\colon \Omega_2 \to D(0;1)$ が存在する。このとき $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ は双正則である。特に同相写像であるので、Ω_1 と Ω_2 は同相である。 □

4.3 Riemann の写像定理　正規化条件

単連結領域 $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ が与えられたとき、Ω の写像関数は一意的には定まらない。定めるためには追加の条件が必要だが、次のものが有名である。

命題 8.4 (写像関数の決定)

Ω は $\mathbb{C}$ の単連結領域で、$\Omega \neq \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ とする。このとき、双正則写像 $\varphi\colon \Omega \to D(0;1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ で

$$\varphi(z_0) = 0, \quad \varphi'(z_0) > 0 \tag{1}$$

を満たすものは一意的である。

(1) を**正規化条件**と呼ぶ。

証明は、円盤に帰着して、1 次分数変換の議論をする (レポート課題にする予定)。

4.4 Jordan 領域の写像関数　Jordan 曲線定理

平面内の単連結領域の重要な例として、以下に紹介する Jordan 領域がある。Jordan 領域の写像関数はポテンシャル問題を解いて求まる (すぐ後)。

定理 8.5 (Jordan 曲線定理)

平面内の任意の単純閉曲線 C に対して、ある領域 U_1, U_2 が存在して、U_1 は有界、U_2 は非有界、さらに

$$\mathbb{C} = U_1 \cup C^* \cup U_2, \quad U_1 \cap U_2 = \emptyset, \quad U_1 \cap C^* = \emptyset, \quad U_2 \cap C^* = \emptyset.$$

ただし、C^* は C の像とする。さらに C^* は U_1, U_2 の共通の境界である。

(単純とは、自分自身と交わらないことを意味する。)

単純閉曲線のことを **Jordan 曲線**とも呼ぶ。Jordan 曲線 C に対して、定理で存在を保証される U_1 を、*C の囲む* **Jordan 領域**と呼ぶ。

定理 8.5 は直観的に納得しやすいが、証明はなかなか面倒ということで有名である。ここでは省略する。

4.4 Jordan 領域の写像関数　ポテンシャル問題への帰着

Jordan 領域 Ω と $z_0 \in \Omega$ に対して、正規化条件 $\varphi(z_0) = 0$, $\varphi'(z_0) > 0$ を満たす写像関数 $\varphi\colon \Omega \to D(0;1)$ は、次の定理に基づき求められる。

定理 8.6 (Jordan 領域の写像関数)

Ω を $\mathbb{C}$ 内の Jordan 領域、$z_0 \in \Omega$ とする。u を、Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題

$$\triangle u = 0 \quad (\text{in } \Omega) \tag{2}$$

$$u(x,y) = -\log|z - z_0| \quad (z = x + iy \in \partial\Omega). \tag{3}$$

の解、v を u の共役調和関数で $v(z_0) = 0$ を満たすものとするとき

$$\varphi(z) := (z - z_0)\exp\left(u(z) + iv(z)\right)$$

は、Ω の写像関数であり、正規化条件を満たす。

v の求め方: 任意の $z \in \Omega$ に対し、z_0 を始点, z を終点とする Ω 内の曲線 C_z を取って

$$v(z) := \int_{C_z} (-u_y\, dx + u_x\, dy) \quad (\Omega \text{ は単連結ゆえ確定する}).$$

駆け足の証明

後述の Carathéodory の定理により、φ を $\overline{\Omega}$ から $\overline{D}(0;1)$ への同相写像に拡張する。

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)-\varphi(z_0)}{z-z_0}=\varphi'(z_0)$$

であるから、z_0 は $\dfrac{\varphi(z)}{z-z_0}$ の除去可能特異点である。以下 $\dfrac{\varphi(z)}{z-z_0}$ を Ω で正則に拡張する。

φ は単射であるから $\varphi'(z_0)\neq 0$. ゆえに $\frac{\varphi(z)}{z-z_0}\neq 0$ $(z\in\Omega)$.

Ω は単連結であるから、$\log\frac{\varphi(z)}{z-z_0}$ の Ω で一価正則な分枝が定まる。その実部、虚部を u, v とする。

$$\log\frac{\varphi(z)}{z-z_0}=u(z)+iv(z). \tag{4}$$

u は調和関数であり、v は u の共役調和関数である。

$z\in\partial\Omega$ のとき $|\varphi(z)|=1$ であるから

$$u(z)=\log\left|\frac{\varphi(z)}{z-z_0}\right|=-\log|z-z_0|\quad(z\in\partial\Omega).$$

ゆえに u は、次の Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題の解として確定する。

$$\triangle u = 0 \quad (\text{in } \Omega) \tag{5}$$

$$u(z) = -\log|z - z_0| \quad (z \in \Omega). \tag{6}$$

v は u の共役調和関数であることから、定数差を除き定まる。例えば、z_0 を始点、$z \in \Omega$ を終点とする Ω 内の曲線 C_z を取って

$$v(z) := \int_{C_z} (v_x\, dx + v_y\, dy) = \int_{C_z} (-u_y\, dx + u_x\, dy)$$

とすればよい (Ω は単連結であるから、v の値は確定する)。

(4) から

$$\varphi(z) = (z - z_0)\exp(u(z) + iv(z))$$

であるから $\varphi(z_0) = 0$. また

$$\varphi'(z) = \exp(u(z) + iv(x)) + (z - z_0)(u'(z) + iv'(z))\exp\left(u(z) + iv(z)\right),$$
$$\varphi'(z_0) = \exp(u(z_0) + iv(z_0)).$$

これから、$\varphi'(z_0) > 0 \Leftrightarrow v(z_0) \equiv 0 \pmod{2\pi}$ が分かる。ゆえに $(\exists k \in \mathbb{Z})$ $v(z_0) = 2k\pi$ であるが、どの k を選んでも φ は変わらないので、$v(z_0) = 0$ で v を定めれば良い。□

2022/6/7 の授業はここまででした。以下は次回にまわします。

定理 8.7 (Carathéodory の定理)

C を $\mathbb{C}$ 内の Jordan 曲線、Ω を C の囲む Jordan 領域、$\varphi\colon \Omega \to D(0;1)$ を双正則とするとき、φ は同相写像 $\widetilde{\varphi}\colon \overline{\Omega} \to \overline{D}(0;1)$ に拡張できる。

私自身はチェックしていないが、Wikipedia ▸ Link に証明の情報がある (手持ちのテキストで載っているものを探したのだけれど…有名な Ahlfors [1] も give up している)。

参考文献

[1] Ahlfors, K.: *Complex Analysis*, McGraw Hill (1953), 笠原 乾吉 訳, 複素解析, 現代数学社 (1982).

[2] 高橋礼司：複素解析, 東京大学出版会 (1990), 最初、筑摩書房から 1979 年に出版された．丸善 eBook では、
https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000049441
でアクセスできる．