応用複素関数 第 7 回

～ 流体力学への応用 (5), ポテンシャル問題 (1) ～

かつらだ まさし
桂田 祐史

2021 年 5 月 31 日

目次

本日の内容・連絡事項

- 流れの重ね合わせを考える。前回解説した簡単な流れ (一様流、湧き出し・吸い込み、渦糸 (点渦)) の重ね合わせによる有名な流れを紹介する。
  講義ノートとして桂田 [1], 参考書として今井 [2] をあげておく。
- レポート課題 1 を出します。〆切は 6 月 25 日 (土) 23:00。提出は Oh-o! Meiji を用いる。
- **ポテンシャル問題** (Laplace 方程式の境界値問題, 日本語？) を解説する。

3.14 流れの合成

2 つの 2 次元渦なし非圧縮流があり、速度場をそれぞれ $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, また複素速度ポテンシャルを f_1, f_2 とする。このとき $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ を速度場とする流れは、やはり 2 次元渦なし非圧縮流であり、その複素速度ポテンシャルは $f_1 + f_2$ である。

実際、

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}_1 = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}_2 = 0, \quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{v}_1 = \mathrm{div}\,\boldsymbol{v}_2 = 0$$

であれば

$$\begin{aligned}
&\mathrm{rot}\,(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = 0, \\
&\mathrm{div}\,(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = 0, \\
&(f_1 + f_2)' = f_1' + f_2' = (u_1 - iv_1) + (u_2 - iv_2) \\
&\qquad\qquad = (u_1 + u_2) - i(v_1 + v_2).
\end{aligned}$$

流れを合成するには、複素速度ポテンシャルを足せば良い

$U, m > 0$ とする。一様流 $f_1(z) = Uz$ と、湧き出し $f_2(z) = m \log z$ の重ね合わせの複素速度ポテンシャルは

$$\begin{aligned} f(z) &= f_1(z) + f_2(z) \\ &= Uz + m \log z = Ur \cos\theta + m \log r + i\,(Ur \sin\theta + m\theta)\,. \end{aligned}$$

ゆえに流れ関数は

$$\psi = Ur \sin\theta + m\theta.$$

$\theta = 0$ とすると $\psi = 0$, また $\theta = \pi$ とすると $\psi = m\pi$ であるから、これらは ψ の等高線である。ゆえに実軸 (原点を除く) は流線である。

また $\theta \in (0, 2\pi)$, $\theta \neq \pi$ とすると

(1) $\psi = m\pi \Leftrightarrow Ur \sin\theta + m\theta = m\pi \Leftrightarrow r = \dfrac{m\,(\pi - \theta)}{U \sin\theta} \Leftrightarrow r = \dfrac{m}{U} \cdot \dfrac{\varphi}{\sin\varphi}$.

ただし $\varphi := \pi - \theta$.

$\theta \in (0, \pi)$ ($\varphi \in (0, \pi)$) と $\theta \in (\pi, 2\pi)$ ($\varphi \in (-\pi, 0)$) で分けて考える。

これは右方向に無限に伸びる U 字型の曲線である [1]。流体が非粘性流体の場合、これを壁面とする物体を (U 字形領域に) 入れても、流れは影響は受けない。ゆえに、この流れは、その形の物体をよぎる流れを表している。

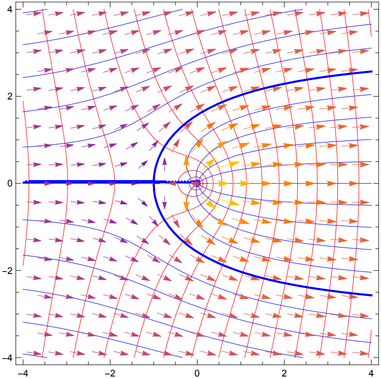


図 1: 一様流と湧き出しの重ね合わせ (太線は $\psi = \pm m\pi$)

3.14.2 同じ強さの湧き出し・吸い込みの対

$z = a$ に置いた強さ m の湧き出し、$z = -a$ に置いた強さ m の吸い込みを重ね合わせる。

$$f(z) := m \log(z-a) - m \log(z+a) = m \log \frac{z-a}{z+a}.$$

(途中で分枝が気になるが、右辺は $\mathbb{C} \setminus [-a, a]$ で一価正則である！)

分子, 分母の z を、それぞれ $z = a + r_1 e^{i\theta_1}$, $z = -a + r_2 e^{i\theta_2}$ で置き換えると

$$f(z) = m\left((\log r_1 + i\theta_1) - (\log r_2 + i\theta_2)\right) = m \log \frac{r_1}{r_2} + im\left(\theta_1 - \theta_2\right).$$

等ポテンシャル線の方程式は $\dfrac{r_1}{r_2} =$ 定数. アポロニウスの円を表す。

流線の方程式は $\Theta := \theta_1 - \theta_2 =$ 定数. Θ は a, $-a$ から点 z を見込む角であるので、2 点 $\pm a$ を結ぶ線分を弦とする円弧である (円周角の定理の逆による)。

3.14.2 同じ強さの湧き出し・吸い込みの対 (続き)

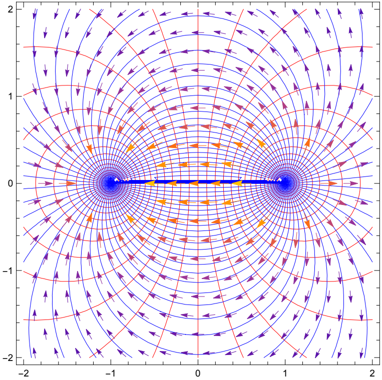


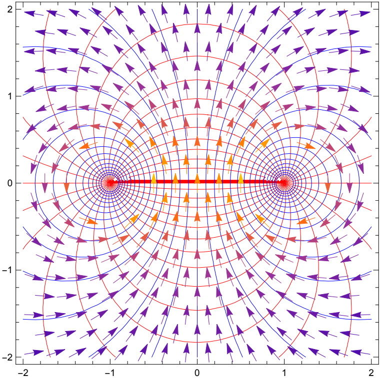
図 2: 同じ強さの湧き出しと吸い込みの重ね合わせ

3.14.3 同じ強さ反対向きの渦の対

等しい強さを持ち、回転の向きが反対の点渦を $z = a, -a$ に置いて重ね合わせた流れの複素速度ポテンシャルは

$$f(z) := i\kappa \log \frac{z-a}{z+a}.$$

等ポテンシャル線、流線の方程式はそれぞれ $\theta_1 - \theta_2 =$ 定数, $\frac{r_1}{r_2} =$ 定数で、どちらも円を表す。



3.14.4 ランキンの卵形 (Rankine body)

$U, m, a > 0$ とする。一様流 $f_1(z) = Uz$, $-a$ に置いた湧き出し $f_2(z) = m\log(z+a)$, a に置いた吸い込み $f_3(z) = -m\log(z-a)$ を重ね合わせる。

$$f(z) := Uz + m\log(z+a) - m\log(z-a) = Uz + m\log\frac{z+a}{z-a}.$$

流れ関数は

$$\psi = Uy - m(\theta_1 - \theta_2) = Uy - m\tan^{-1}\frac{2ay}{x^2+y^2-a^2}.$$

実軸 $y = 0$ では、$\psi = 0$ であるから、実軸は 1 つの流線である。また

$$\psi = 0 \Leftrightarrow y = \frac{m}{U}\tan^{-1}\frac{2ay}{x^2+y^2-a^2}.$$

この方程式は卵形の曲線を表す。これを **Rankine の卵形** (the Rankine bpdy) と呼ぶ。

3.14.4 ランキンの卵形 (Rankine body) 続き

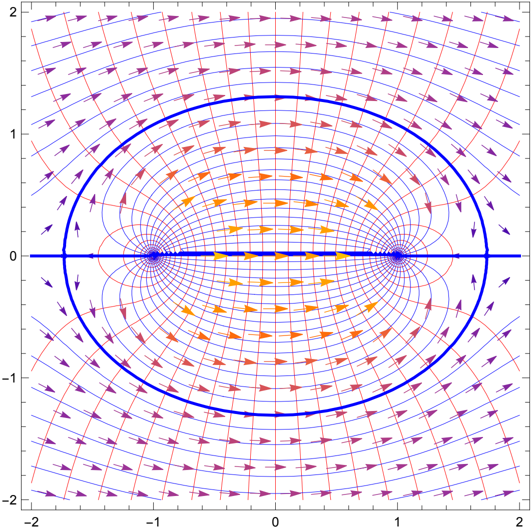


図 4: Rankine の卵形 (同じ強さの湧き出し・吸い込みと一様流の重ね合わせ)

3.14.5 2重湧き出し (doublet)

同じ強さの湧き出し・吸い込み対の流れの複素速度ポテンシャルは

$$f(z) = m\log(z-a) - m\log(z+a).$$

$\mu > 0$ を取り、$2am = \mu$ という関係式を保ったままで、$a \to 0$ とした極限を考えよう。

$$\begin{aligned} f(z) &= m\log(z-a) - m\log(z+a) = -\mu\frac{\log(z+a)-\log(z-a)}{2a} \\ &\to F(z) := -\mu\frac{d}{dz}\log z = -\frac{\mu}{z} = \frac{-\mu x}{x^2+y^2} + i\frac{\mu y}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

F を複素速度ポテンシャルとする流れを**二重湧き出し** (doublet) と呼ぶ。

3.14.5 2 重湧き出し (doublet) (続き)

$F(z) := -\frac{\mu}{z}$ の定める流れの等ポテンシャル線は、実軸上に中心を持ち原点を通る円、または虚軸 (原点を除く) である。

一方、流線は、虚軸上に中心を持ち原点を通る円または実軸 (原点を除く) である。

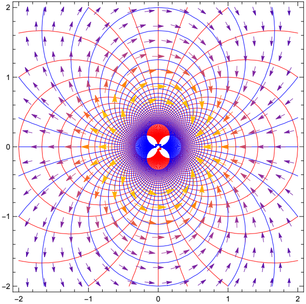


図 5: 二重湧き出し (同じ強さの湧き出し・吸い込みの極限)

3.14.6 円柱を過ぎる一様流

ランキンの卵形で $2am = \mu$ (正定数) として $a \to 0$ としてみよう (二重湧き出しと一様流との重ね合わせ、とも言える)。

$$f(z) = Uz + \frac{\mu}{z} = U\left(z + \frac{R^2}{z}\right), \quad R := \sqrt{\mu/U}.$$

$$f(re^{i\theta}) = U\left(r\cos\theta + i\sin\theta + \frac{R^2}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)\right)$$

であるから、速度ポテンシャル ϕ と流れ関数 ψ は

$$\phi = U\left(r + \frac{R^2}{r}\right)\cos\theta, \quad \psi = U\left(r - \frac{R^2}{r}\right)\sin\theta.$$

特に円周 $r = R$ 上で $\psi = 0$ であるから、$r = R$ は流線である。

3.14.6 円柱を過ぎる一様流 (続き)

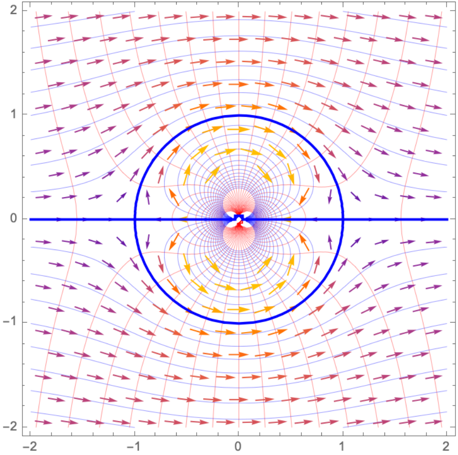


図 6: 円柱を過ぎる一様流

完全流体の一様流の中に円柱を入れると

まず復習から。非圧縮渦なし (ポテンシャル) 流の速度ポテンシャル ϕ は次を満たす (第 6 回授業)。

$$\triangle\phi = 0 \quad (\text{in } \Omega) \tag{2}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial \boldsymbol{n}} = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} \quad (\text{on } \partial\Omega). \tag{3}$$

$\partial\Omega$ 上の $\boldsymbol{v}$ が分かれば、(2), (3) は、Laplace 方程式の Neumann 境界値問題である。(かなり一般的な条件下で) 定数差を除いて一意的に解が存在する。

ϕ が求まれば、$\boldsymbol{v} = \operatorname{grad}\phi$ により $\boldsymbol{v}$ が得られ、流れが決定される。

$\partial\Omega$ 上の $\boldsymbol{v}$ さえ分かれば、(2), (3) を解いて流れが求まる。

前回既知の正則関数を組み合わせることで色々な 2 次元流れを表す、という手法を紹介した。例えば円柱周りの一様流の問題などを解いた。扱える問題の範囲が異なり、どちらが優れているとも言えないが、こちらの方法の有効性を想像するのは難しくないであろう (実際、とても強力である)。

Laplace 方程式の境界値問題 (2), (3) を少し一般化する。

Ω は $\mathbb{R}^n$ $(n=2,3)$ の領域、$\Gamma := \partial\Omega$ は

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \quad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$$

と分割されていて、$f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $g_1\colon \Gamma_1 \to \mathbb{R}$, $g_2\colon \Gamma_2 \to \mathbb{R}$ が与えられたとする。また $\boldsymbol{n}$ は、Γ_2 上の点における外向き単位法線ベクトルとする。

このとき $u\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ で、次の方程式を満たすものを求めることを考える。

$$-\triangle u = f \quad (\text{in } \Omega) \tag{4}$$

$$u = g_1 \quad (\text{on } \Gamma_1) \tag{5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = g_2 \quad (\text{on } \Gamma_2). \tag{6}$$

(4) は有名な **Poisson方程式**(ポアソン)である。

(5), (6) はそれぞれDirichlet(ディリクレ)境界条件, Neumann(ノイマン)境界条件と呼ばれる。

4.2 Poisson 方程式の境界値問題　(その重要性の説明)

Poisson 方程式は、楕円型偏微分方程式の典型例であり、様々な現象のモデルに登場する。

重力場	f は (質量分布の) 密度, ϕ はポテンシャル・エネルギー
静電場	f は電荷密度, ϕ は電位
熱平衡	f が発生する熱量, ϕ は温度

この問題は数学的に非常に詳しく研究されてきた。一般に解の存在が証明できたのは 20 世紀に入ってからである。

その中でも $f=0$ の場合 (Laplace 方程式 $\triangle u=0$) がとりわけ重要である。これは関数論においても、多くの基本的な結果を得るための基礎となる (調和関数を決定する問題だから)。

ポテンシャル問題には、**差分法** (FDM, finite difference method)、**有限要素法** (FEM, finite element method) をはじめとする多くの数値計算法が適用できる。特に Laplace 方程式の場合は、**基本解の方法** (method of fundamental solution) が有力である。

参考文献

[1] 桂田祐史：複素関数と流体力学,
http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/intro-fluid.pdf (2015〜).

[2] 今井功：複素解析と流体力学, 日本評論社 (1981/10/20, 1989/4/1).