応用複素関数 第 6 回

～ 流体力学への応用 (4) ～

かつらだ まさし
桂田 祐史

2022 年 5 月 24 日

目次

本日の内容・連絡事項

- 体調不良の人は無理をせず休んで下さい。欠席した場合に自習の参考になるように、第 1〜5 回については、昨年度の講義資料を授業 WWW サイトに公開した。
- 次回授業 (5 月 31 日) でレポート課題 1 を出す (〆切 6 月 25 日 (土)23:00)。(教育実習の人は事前に相談して下さい。)
- 本日の内容

  2 次元非圧縮ポテンシャル流が正則関数であること

  を述べる。(それらの重ね合わせに対する流れは次回。)
  流体に関わらない正則関数の話としても重要である。
- 関数論と流体力学についての資料 (PDF にはリンクを張ってある)
  - 「複素関数と流体力学」桂田 [1]…講義ノートのようなもの。
  - 「ベクトル解析早見表」 桂田 [2]…定義式や定理。

  参考書としては、今井「複素解析と流体力学」 [3] をあげておく。

命題 7.1 (非圧縮流と流れ関数)

2 次元の速度場 $\boldsymbol{v}$ について

1. $\boldsymbol{v}$ の流れ関数が存在すれば非圧縮 ($\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$)。
2. 非圧縮 ($\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$) ならば、任意の単連結領域で $\boldsymbol{v}$ の流れ関数が存在する。
3. $\boldsymbol{v}$ の流れ関数 ψ が存在するとき、$\triangle\psi = -\operatorname{rot} \boldsymbol{v}$. 特に渦なしならば $\triangle\psi = 0$.

ただし $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} := \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}$ とする。　渦無しと速度ポテンシャルの関係と似てる。

証明 (1) $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial \psi}{\partial y} + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(-\dfrac{\partial \psi}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0.$

(2) $\operatorname{rot} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} = \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial}{\partial x}(-v) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$ であるから、任意の単連結領域で $\psi(\boldsymbol{x}) := \displaystyle\int_{C_x} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} \cdot d\boldsymbol{r}$ が well-defined であり、$\dfrac{\partial \psi}{\partial x} = -v$, $\dfrac{\partial \psi}{\partial y} = u$.

ゆえに ψ は $\boldsymbol{v}$ の流れ関数である。

(3) $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\dfrac{\partial \psi}{\partial x}\right) - \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial \psi}{\partial y} = -\triangle\psi.$ □

(流れ関数の意味を説明するが、最初に学ぶときは、飛ばしても良い。)

考えている領域 Ω 内に定点 $\boldsymbol{a}$ を選び、$\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{x} \in \Omega$ に至る Ω 内の曲線 $C_{\boldsymbol{x}}$ を取ると、$\psi(\boldsymbol{x}) := \int_{C_{\boldsymbol{x}}} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} \cdot d\boldsymbol{r}$ が流れ関数となった。弧長パラメーター s を用いると、$\boldsymbol{t} := \begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(s) \end{pmatrix}$ は単位接線ベクトルとなり

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \int_{C_{\boldsymbol{x}}} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{C_{\boldsymbol{x}}} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{t}\, ds = \int_{C_{\boldsymbol{x}}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, ds.$$

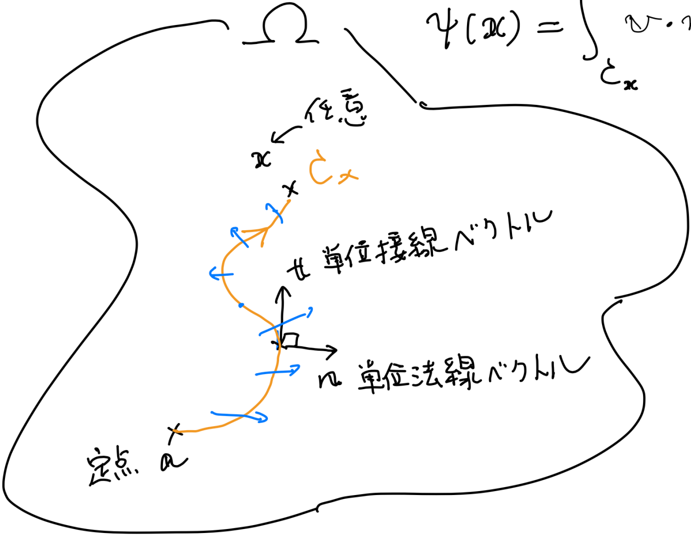
ただし

$$\boldsymbol{n} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{t} = \begin{pmatrix} y'(s) \\ -x'(s) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

($\boldsymbol{n}$ は $\boldsymbol{t}$ を $-\pi/2$ 回転したもので、単位法線ベクトルである。)

$\psi(\boldsymbol{x})$ はいわゆる**流束積分** (flux integral) である。すなわち、$C_{\boldsymbol{x}}$ を横切り、$\boldsymbol{n}$ の側に単位時間に流れる流体の量 (2 次元なので面積) である。

$$\psi(x) = \int_{C_x} v \cdot n \, ds$$



(フライングになるが、複素速度ポテンシャルが存在する場合について)

複素速度ポテンシャル f が存在する場合は、流束積分は複素積分で計算できる:

(1)
$$\int_C \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,ds = \operatorname{Im}\int_C f'(z)\,dz.$$

実際、

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,ds = -v\,dx + u\,dy = \psi_x dx + \psi_y dy,$$

$$\begin{aligned} f'(z)\,dz &= (\phi_x + i\psi_x)(dx + i\,dy) \\ &= (\phi_x dx - \psi_x dy) + i(\psi_x dx + \phi_x dy) \\ &= (\phi_x dx + \phi_y dy) + i(\psi_x dx + \psi_y dy) \end{aligned}$$

であるから

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,ds = \operatorname{Im} f'(z)\,dz.$$

3.12 2次元非圧縮渦なし流 (1) 振り返り

今日の議論を振り返る。3.12, 3.13 の定理を並べる。

命題 7.2 (渦なし流と速度ポテンシャル)

2 次元の速度場 $\boldsymbol{v}$ について

1. $\boldsymbol{v}$ のポテンシャルが存在すれば渦なし ($\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} = 0$)。
2. 渦なし ($\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} = 0$) ならば、任意の単連結領域で $\boldsymbol{v}$ のポテンシャルが存在する。
3. $\boldsymbol{v}$ のポテンシャル ϕ が存在するとき、$\triangle\phi = \mathrm{div}\,\boldsymbol{v}$. 特に非圧縮流ならば $\triangle\phi = 0$.

ただし $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} := \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ とする。

命題 7.3 (非圧縮流と流れ関数)

2 次元の速度場 $\boldsymbol{v}$ について

1. $\boldsymbol{v}$ の流れ関数が存在すれば非圧縮 ($\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0$)。
2. 非圧縮 ($\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0$) ならば、任意の単連結領域で $\boldsymbol{v}$ の流れ関数が存在する。
3. $\boldsymbol{v}$ の流れ関数 ψ が存在するとき、$\triangle\psi = -\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}$. 特に渦なしならば $\triangle\psi = 0$.

ただし $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} := \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ とする。

3.12 2次元非圧縮渦なし流 (2) 関数論との関係

2 次元で、非圧縮と渦なしの両方を仮定するとどうなるか。ある ϕ, ψ が存在して

$$\nabla\phi = \begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{pmatrix} = \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \psi_y \\ -\psi_x \end{pmatrix}.$$

このとき

$$f(x+iy) := \phi(x,y) + i\psi(x,y)$$

とおき、f を $\boldsymbol{v}$ の**複素速度ポテンシャル**と呼ぶ。

実は **f は正則関数である**。実際

$$\phi_x = u = \psi_y, \quad \phi_y = v = -\psi_x$$

であるから、Cauchy-Riemann 方程式が成り立つ。また

$$f' = u - iv \quad (\text{微分すると速度が得られる}).$$

実際、$f' = \phi_x + i\psi_x = u + i(-v) = u - iv$.

ϕ と ψ は調和関数である。正則関数の常識であるが、次の式も見ておこう。

$$\triangle\phi = \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0, \quad \triangle\psi = -\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = 0.$$

複素関数の可視化 (流体の話を離れて)

複素関数 f の実部・虚部をそれぞれ u, v として、それらが微分可能なとき、f が正則であるためには

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

という Cauchy-Riemann 方程式を満たすことが必要十分である、という定理があった。

ゆえに任意の正則関数 f について

$$\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v = u_x v_x + u_y v_y = u_x(-u_y) + u_y u_x = 0$$

であるから、**実部 u, 虚部 v の等高線は互いに直交している**。

(復習: $\operatorname{grad}\phi$ は ϕ の等高線 ($\phi(x,y) = c$) の法線ベクトルである。)

複素関数の有名なテキストである Ahlfors [4] では、初等関数の実部・虚部の等高線がどうなっているか、紙数を惜しまずに具体例をあげて説明してある。

(小さな文字で流体の話に戻すと　等ポテンシャル線と流線は直交する、ということ。)

1 次関数 $f(z) = cz$, $c = p - iq$ (ただし $p, q \in \mathbb{R}$) のとき、

$$f(x + yi) = (p - iq)(x + yi) = px + qy + i(-qx + py),$$
$$u - iv = f' = c = p - iq.$$

復習: 正則関数 f の定める速度場の成分を u, v とすると、$f' = u - iv$.

ゆえに f を複素速度ポテンシャルとする流れの速度場は

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

これは定数である。そのため (場所によらないため) **一様流**と呼ばれる。

1 次関数は一様流の速度ポテンシャルである。

このとき、速度ポテンシャルと流れ関数は

$$\phi(x, y) = \mathrm{Re}\, f(x + iy) = px + qy, \quad \psi(x, y) = \mathrm{Im}\, f(x + iy) = -qx + py.$$

3.13.1 一様流 続き

等ポテンシャル線 ($\phi = \mathrm{const.}$) も、流線 ($\psi = \mathrm{const.}$) も平行直線群であり、それらは互いに直交する。

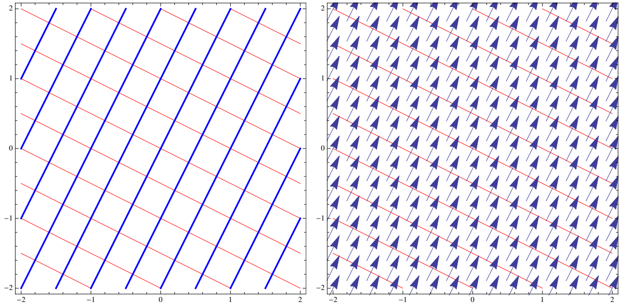


図 1: 一様流の等ポテンシャル線 (赤)、流線 (青) と速度ベクトル

3.13.2 湧き出しと吸い込み

$m \in \mathbb{R}$, $f(z) = m \log z$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$. この f は多価関数なので、少し気持ちが悪いが、分枝は定数差しかないので、微分すると一価である。

$z = re^{i\theta}$ $(r \geq 0,\ \theta \in \mathbb{R})$ とすると

$$f\left(re^{i\theta}\right) = m\left(\log r + i\theta\right) = m \log r + im\theta,$$

$$u - iv = f'(z) = \frac{m}{z} = \frac{m}{re^{i\theta}} = \frac{m}{r}\left(\cos\theta - i\sin\theta\right).$$

ゆえに f を複素速度ポテンシャルとする流れの速度場は

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m}{r}\cos\theta \\ \frac{m}{r}\sin\theta \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{v}$ の方向は、$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$ と同じ。$m > 0$ ならば向きも同じ (湧き出し)、$m < 0$ ならば向きは逆 (吸い込み)。

$\boldsymbol{v}$ の大きさ $|\boldsymbol{v}|$ は $\frac{|m|}{r}$ で、原点からの距離に反比例している。

速度ポテンシャルと流れ関数は

$$\phi(x,y) = \operatorname{Re} f(z) = m \log r, \quad \psi(x,y) = \operatorname{Im} f(z) = m\theta.$$

3.13.2 湧き出しと吸い込み (続き)

等ポテンシャル線 ($\phi = m \log r =$ 定数) は原点を中心とする同心円群、流線 ($\psi = m\theta =$ 定数) は原点を始点とする半直線群である (もちろん互いに直交)。

原点を正の向きに一周する閉曲線 C に対し、C から外に湧き出る流量は

$$\int_C \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, ds = \mathrm{Im} \int_C f'(z)\, dz = \mathrm{Im} \int_C \frac{m}{z}\, dz = 2\pi m \quad (C \text{ によらない}).$$

この流れは、$m > 0$ ならば原点においた**湧き出し** (source), $m < 0$ ならば原点に置いた**吸い込み** (sink) と呼ばれる。

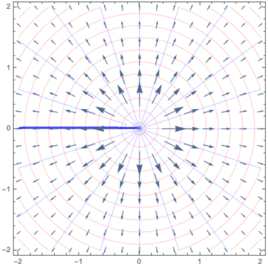


図 2: 湧き出しの等ポテンシャル線、流線、速度場

3.13.3 渦糸 (点渦)

$\kappa \in \mathbb{R}$, $f(z) = i\kappa \log z$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$.
$z = re^{i\theta}$ $(r \geq 0,\ \theta \in \mathbb{R})$ とすると

$$f(re^{i\theta}) = i\kappa\left(\log r + i\theta\right) = -\kappa\theta + i\kappa \log r,$$

$$u - iv = f'(z) = \frac{i\kappa}{z} = \frac{i\kappa}{r}\left(\cos\theta - i\sin\theta\right) = \frac{\kappa}{r}\left(\sin\theta + i\cos\theta\right).$$

ゆえに f を複素速度ポテンシャルとする流れの速度場は

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{\kappa}{r}\begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{v}$ の方向は $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を $-\frac{\pi}{2}$ 回転した方向である。$\kappa > 0$ ならば向きも同じ (時計回り)、$\kappa < 0$ ならば向きは逆 (反時計回り)。

$\boldsymbol{v}$ の大きさは $\frac{|\kappa|}{r}$ で、原点からの距離に反比例する。

速度ポテンシャルと流れ関数は

$$\phi(x, y) = \mathrm{Re}\, f(z) = -\kappa\theta, \quad \psi(x, y) = \mathrm{Im}\, f(z) = \kappa \log r.$$

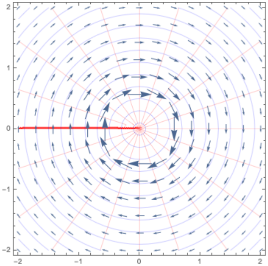
3.13.3 渦糸 (点渦) 続き

等ポテンシャル線 ($\phi = -\kappa\theta =$ 定数) は原点を始点とする半直線で、流線 ($\psi = \kappa \log r =$ 定数) は原点を中心とする円である。

この流れは、原点に置かれた**渦糸**(うずいと) (vortex filament, vortex string) または**点渦**(てんうず) (point vortex) と呼ばれる。

渦度は $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 全体で 0. (渦度が原点に集中していて他は渦なし、と考えるべきかもしれない。)

問　$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{v} = 0$ を確かめよ (f は一価正則でなく、前回の説明の範疇には収まらないので、念のため確認)。



3.13.4 Mathematica で可視化する

以上の単純な場合は、紙とペンでも十分理解可能であるが、この辺で文明の利器を。

コマンドをコピペできると便利なので、この部分の資料は WWW に置く。

「簡単な正則関数を複素速度ポテンシャルとする流れの可視化」
http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/fluid_mathematica/

参考文献

[1] 桂田祐史：複素関数と流体力学, http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/intro-fluid.pdf (2015〜).

[2] 桂田祐史：ベクトル解析早見表, http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/applied-complex-function-2021/vector_analysis.pdf (2021/5/31).

[3] 今井功：複素解析と流体力学, 日本評論社 (1981/10/20, 1989/4/1).

[4] Ahlfors, K.: *Complex Analysis*, McGraw Hill (1953), 笠原 乾吉 訳, 複素解析, 現代数学社 (1982).