ベクトル解析早見表

かつらだ まさし
桂田 祐史

2021 年 5 月 31 日

おまけ: ベクトル解析の復習 (1) grad, div, rot, $\triangle$

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = \nabla \cdot \boldsymbol{u} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}.$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{u} = \operatorname{curl} \boldsymbol{u} = \nabla \times \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

$$\triangle f = \nabla^2 f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}, \quad \triangle \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \triangle u_1 \\ \vdots \\ \triangle u_n \end{pmatrix}.$$

$$\int_V \operatorname{div} \boldsymbol{u} \, dx = \int_{\partial V} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} \, d\sigma \quad \text{(Gauss の発散定理)}.$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{rot}\,\mathrm{grad} = \mathbf{0} \quad (\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}),\\
&\mathrm{div}\,\mathrm{grad} = \triangle \quad (\nabla \cdot \nabla f = \triangle f),\\
&\mathrm{div}\,\mathrm{rot} = 0 \quad (\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{u}) = 0),\\
&\mathrm{rot}\,\mathrm{rot} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div} - \triangle \quad (\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{u}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) - \triangle \boldsymbol{u}).
\end{aligned}
$$

方向微分係数の定義と合成関数の微分法から

$$
\nabla f \cdot \boldsymbol{n} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}.
$$

おまけ: ベクトル解析の復習 (3) ポテンシャルの存在

命題 0.1 (ポテンシャルの存在定理)

$\mathbb{R}^n$ の単連結領域 Ω におけるベクトル場 $\boldsymbol{f} = (f_i)$ が $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$ $(1 \le i \le n,\ 1 \le j \le n)$ を満たすならば、$F(\boldsymbol{x}) := \displaystyle\int_{C_{\boldsymbol{x}}} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r}$ は $C_{\boldsymbol{x}}$ の取り方によらず well-defined であり、$\nabla F = \boldsymbol{f}$ を満たす。ただし $C_{\boldsymbol{x}}$ は定点から $\boldsymbol{x}$ に至る Ω 内の曲線である。

特に 3 次元ベクトル場 $\boldsymbol{f}$ が $\operatorname{rot} \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$ を満たす場合、2 次元ベクトル場 $\boldsymbol{f}$ が $\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0$ を満たす場合、$\boldsymbol{f}$ はポテンシャルを持つ。

理解を深めるための注意を 2 つ

- 1 変数関数の場合の $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$ に相当する。
- C^2 級のポテンシャル F が存在する場合、$\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}$, $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}$ であるから、$\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$ が成り立つことは明らかである。

入門部分のベクトル解析については、例えば桂田 [1] を見よ。

ベクトル解析の復習 (4)

grad は法線ベクトル　関数 $F\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ について、方程式 $F(x) = c$ の定める曲線 (曲面) を等高線 (等値面) と呼ぶ。$\mathrm{grad}\, F$ はそれらの法線ベクトルとなる。

流束積分　単位法線ベクトルが $\boldsymbol{n}$ である曲面 S (曲線 C) と速度場 $\boldsymbol{v}$ について

$$\int_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma \quad \left(\int_C \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, ds\right)$$

を**流束積分**, flux integral と呼ぶ。物理的には、単位時間に S (C) を通り抜ける流体の体積 (面積) を表す。ただし、 $\boldsymbol{n}$ の向いている側に出る量を正とする (S が領域 Ω の境界の場合は、Ω の外に流出する量ということになる)

ベクトル解析の復習 (5)

Green の積分公式

$$\int_{\Omega} \triangle u\, v\ dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v\ d\sigma - \int_{\Omega} \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v\ dx.$$

参考文献

[1] 桂田祐史：多変数の微分積分学 2 講義ノート 第 2 部, http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu2/tahensuu2-p2.pdf (内容はベクトル解析) (2006〜).