応用複素関数レポート課題ABC···

桂田 祐史

2021 年 7 月 9 日, 2021 年 7 月 27 日 15:45 改訂

以下の課題から選んでレポートせよ。(A), (B), (C) は難しさのおおまかなレベルを表す ((A) が簡単、(B) はそれより重め、(C) は骨が折れるけれどやる価値がある)。(B) 以上を選ぶ場合は 1 つで良いが、(A) だけの場合は 2 つ以上を選ぶこと。

当初〆切は 7 月 27 日とアナウンスしましたが、課題文の発表が遅れたため (この三日間体調不良でダウンしていました)、7 月 31 日 (土曜) 23:00 〆切とします。

授業 WWW サイト[1] から授業で使ったスライドを見ると、内容が確認しやすいと思います (Oh-o! Meiji でも良いですが)。

簡単に済むもの以外は、有名なものが多いです。テキスト等に載っているのを見つけて、それを自分なりに解読して書くことを想定しています。(そのまま写して、そのテキスト独自の記号などを使って説明がないようなのはダメです。そういう記号は定義を述べるか、この授業で使っているものに直すかして下さい。)

課題 A. (A) 一松 [1] を読んで、定積分計算または級数の和計算について、授業で紹介していない方法を用いる例 (自分が面白いと感じたもの) を 1 つレポートせよ。なぜその例を選択したか説明すること。

課題 B. (B) sin の無限乗積展開 $\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \dfrac{z^2}{n^2}\right)$ $(z \in \mathbb{C})$ を証明せよ。(注意: 無限積の収束の定義をきちんと述べること。広義一様収束することを示すこと。)

課題 C. (A) 定理 2.1 (3) を証明せよ。($|s_3(z)| \le 2\pi$ $(z \in \Gamma_N^*)$ も省略せずに証明すること。)

課題 D. (A) 第 4 回授業スライド 4 ページ

(1) 任意の $(x_1, x_2, x_3) \in S \setminus N$ に対して $\varphi(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}$ を示せ。

(2) 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して $\varphi(x_1, x_2, x_3) = z$ を解け。

課題 E. (B) $\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ の同相写像は 1 次分数変換に限ることを証明せよ。

課題 F. (A) 命題 4.2 (1 次分数変換の鏡像の原理) を証明せよ。

課題 G. (C) 定理 4.3 (Riemann の写像定理) を証明せよ。

[1] http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/

課題 H.　(B) 定理 4.4 (単位円盤の等角写像) を証明せよ。Schwarz の補題を使うならば、その証明もすること。

課題 I.　(A) 例 4.5 Cayley 変換 $\varphi(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$ が上半平面 $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ の写像関数であることを示せ。

課題 J.　(A) 単連結領域 $\Omega \subsetneqq \mathbb{C}$ と $z_0 \in \Omega$ に対して、双正則写像 $\varphi\colon \Omega \to D(0;1)$ で、$\varphi(z_0) = 0$ と $\varphi'(z_0) > 0$ を満たすものは 1 つしかないことを示せ。

課題 K.　(A) 第 5 回授業スライド 15 ページ「$P = (-p + \lambda \operatorname{div} \boldsymbol{v})I + 2\mu E$ が成り立つとき、$\operatorname{div} P = -\nabla p + \mu \triangle \boldsymbol{v} + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{v})$ が成り立つ」を証明せよ。

(少し長いけれど単純な計算です。ベクトル解析の記号になれるのに良い問題。)

(2021/7/27 加筆)「$P = (-p + \lambda \operatorname{div} \boldsymbol{v})I + 2\mu E$」が「$P = (-p + \lambda \operatorname{div} \boldsymbol{u})I + 2\mu E$」になっていたのを直しました。

課題 L.　(C) 第 10 回授業スライド 4 ページ「$u(x) = \displaystyle\int_\Omega E(x-y)\rho(y)\,dy$ は $-\triangle u = \rho$ を満たす」を証明せよ。

(非常に有名な定理です。きちんと理解できたら偉い。)

課題 M.　(C) 第 11 回授業スライド 6 ページ定理 11.1 (Weyl の定理) を証明せよ。

(例えば、ケルナー [2] に載っていた記憶があるが、上巻、下巻のどちらかであったかは覚えていない。有名な定理なので、他のテキストにも載っているであろう。)

課題 N.　(C) Euler-MacLaurin 展開を証明せよ (これについては第 13 回の授業で説明するかも)。そこに現れる Bernoulli 数、Bernoulli 多項式の定義を述べ、証明に必要な性質も証明すること。

(非常に有名な定理です。きちんと理解できたら偉い。)

課題 O.　(B) Simpson 公式が 3 位の公式であることを証明せよ。

(2 位以上であることは当たり前だけど、3 位になるのは少し不思議が入っています。)

課題 P.　(B) 第 12 回スライド 16 ページ $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $z \in \mathbb{C} \setminus [a, b]$ とするとき、

$$\int_a^b \frac{dx}{z-x} = \operatorname{Log} \frac{z-a}{z-b}$$

であることを示せ。ただし Log は複素対数関数の主値である。

(主値であることをきちんと使う必要があります。それをしないのはダメ解答です。)

参考文献

[1] 一松信(ひとつまつしん)：留数解析 — 留数による定積分と級数の計算, 共立出版 (1979), 第 5 章は数値積分の高橋-森理論の解説。

[2] T. W. ケルナー：フーリエ解析大全 上・下, 朝倉書店 (1996), 高橋 陽一郎 訳.