応用複素関数レポート課題 3

桂田 祐史

2021 年 7 月 5 日, 2021 年 7 月 6 日

- レポート課題 1,2,3 のうちから 2 つレポートを提出すれば良いので、すでに課題 1,2 のレポートを提出している人は、課題 3 のレポートを提出する必要はありません。
- 締め切りは 7 月 31 日 (土曜)23:00 です。
- 提出方法は Oh-o! Meiji.
  もし容量制限 (1 ファイル 30MB) に引っかかった場合は、分割して送って下さい。
- 使用するプログラミング言語は、自分の MacBook で実行して見せることが可能なものであればなんでも可。
- プログラムとその実行結果、実行するための情報を含めること。
- 実行結果は、数表・グラフを適切に選択して分かりやすく提示すること。
  - 誤差などは固定小数点形式 (C 言語の `%f`) よりは指数形式 (C 言語の `%e`) を使う、むやみに多くの桁を表示しない、あるいは表よりはグラフ (対数目盛りが適当な場合が多い) を使う。
    グラフに Excel を使う人が多いけれど、可能ならば gnuplot を使って下さい。
  - 反対に必要があれば (意味があるならば) 多くの桁数を表示させる (`%`m`.`n`f` などを使う)。

課題 3

次の (1)〜(5) からいずれか 1 つ選んでレポートせよ。

(1) 計算が困難であると予想される定積分を自分で選び、数値積分で値を求める。その値がどれくらいの精度か (誤差がどの程度か)、何らかの方法で確認すること。なるべく複数の方法で計算すること。分割を細かくすると精度がどのように変わるか調べること。

注: この課題は例年出題しているが、全然困難でない問題を選んだりする人が少なくない。授業内容の理解が求められる。

(2) Euler のガンマ定数 γ は、普通 $\gamma := \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n\right)$ で定義されるが、この式で γ の値を計算するのは難しい。

$$\gamma = -\int_0^1 \log\log\frac{1}{x}\,dx \tag{1}$$

が成り立つことが知られている。この右辺を数値積分することで γ の近似値を求めよ。(被積分関数 $f(x) = -\log\log\dfrac{1}{x}$ がどういう関数か調べて、注意して計算すること。) 結果を

何らかの方法でチェックすること (誤差がどの程度か)。(1) がなぜ成り立つか調べることが望ましい。

(3) ガンマ関数 $\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt$ $(x>0)$ を数値積分することにより計算するプログラムを作り、どういう範囲の x に対して、どの程度の精度が得られるか、調べよ。被積分関数 $e^{-t}t^{x-1}$ がどのような関数か、理解した上で取り組むこと。

(注) よく知られている関数等式 $\Gamma(x)=(x-1)\Gamma(x-1)$ を利用すると、どこか都合の良い幅 1 の区間に属する x に対して数値積分で $\Gamma(x)$ を求めれば良いことになる。

(4) $I=\int_a^b f(x)\,dx$ に対する数値積分公式では、f の値のみ用い、f の導関数の値は使わないのが普通であるが、f' の値を使って良いならば、**補正台形公式**と呼ばれる

$$T_{N,\,補} := T_N - \frac{h^2}{12}\left(f'(b)-f'(a)\right)$$

がある。台形公式 T_N と比べて、$T_{N,\,補}$ では精度がどれくらい改善されるか、適当な被積分関数を選んで実験して調べよ。中点公式 M_N はどう補正すれば良いか。

(5) 講義で説明した関数 $f(x)=\dfrac{1}{1+25x^2}$ 以外の関数に対して (本質的に違うものを複数選んで実験すること)、Runge の現象が起こるかどうか調べよ。