応用複素関数レポート課題2

桂田 祐史

2021 年 6 月 15 日

- 数字のついているレポート課題は 3 つ出す予定で、必ずしもこの課題 2 を解かなくても良いですが、比較的解きやすいので、チャレンジすることを勧めます。
- 締め切りは 7 月 12 日 (月曜) 23:00 です。
- 提出方法は Oh-o! Meiji. A4 サイズの PDF にして下さい。
もし容量制限 (1 ファイル 30MB) に引っかかった場合は、複数のファイルに分割するなど工夫して下さい。
- 使用するプログラミング言語は、自分の MacBook で実行して見せることが可能なものであればなんでも可。
(本課題は、FreeFem++ によるサンプル・プログラムを提供しているので、FreeFem++ を採用するのが簡単でしょう。)
- プログラムとその実行結果、実行するための情報を含めること。
- FreeFem++ の使い方については、
    - `FreeFEM-documentation.pdf` (公式ドキュメント)
    https://doc.freefem.org/pdf/FreeFEM-documentation.pdf
    - 「FreeFem++ の紹介」桂田書いた紹介文書 (更新が必要だけれど…)
    http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/text/welcome-to-freefem/
    - 「FreeFem++ノート」(桂田の自分用メモ)
    http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/text/freefem-note/

課題2

2 次元非圧縮ポテンシャル流の定常流で、流体の占める領域 Ω と、その境界 $\Gamma = \partial\Omega$ での流速の法線成分 $v_n := \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$ が分かっている場合に、速度ポテンシャル ϕ、流れ関数 ψ を計算して、等ポテンシャル線、流線、速度場を可視化せよ。領域 Ω と境界値 (流速の法線成分) v_n は、自分で興味のあるもの、自分の都合の良いものを選んで良い (後の注意を読んでおくこと)。

ϕ は、ポテンシャル問題 (ここでは Laplace 方程式の Neumann 境界値問題)

$$\triangle\phi = 0 \quad (\text{in } \Omega) \tag{1}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{n}} = v_n \quad (\text{on } \Gamma) \tag{2}$$

の解である。

ポテンシャル問題 (1), (2) を解いて、等ポテンシャル線と速度場 $\boldsymbol{v}$ を求めるサンプル・プログラム `potential2d-v0.edp` を公開してある。

`potential2d-v0.edp` は、ターミナルで次のようにして入手する

```
curl -O http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/potential2d-v0.edp
```

大筋は、Ω と v_n を自分が決めたものにするようにプログラムを書き換えれば良い。(弱形式は変更する必要がない。) 自由度は高いので、工夫・遊び心発揮を期待する。

(過去の例では、円を楕円にするような (一見) 安直な選択があったが、そういう人の多くは、$\displaystyle\int_{\partial\Omega} v_n\,d\sigma = 0$ を満たす v_n が見つけられなかったりしていた。)

流線の書き方には色々なやり方がある (一つくらいノーヒントの問を入れておくことにする)。選んだ問題によっては、分かりやすい図が描けるように調整が必要な場合もある。

注意

(1) $v_n := \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$ は $\displaystyle\int_\Gamma v_n\,d\sigma = 0$ を満たしている必要がある。実際、Gauss の発散定理と非圧縮性の仮定から

$$\int_\Gamma v_n\,d\sigma = \int_\Gamma \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma = \int_\Omega \operatorname{div}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x} = \int_\Omega 0\,d\boldsymbol{x} = 0.$$

サンプルプログラムでは、円盤領域 $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}$, 一様流 $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ であったので、

$$\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\quad v_n = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x+2y$$

としてある。$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$ であるから、当然 $\displaystyle\int_\Gamma v_n\,d\sigma = 0$ も成り立つ。

(2) 湧き出しや吸い込み、点渦など、特異点が Ω 内にあるような問題は、この方法では解くことが出来ない。

サンプルプログラム解説

potential2d-v0.edp[1]

```
1  // potential2d-v0.edp
2  //   http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/potential2d-v0.edp
3  //   2次元非圧縮ポテンシャル流
4  //     速度ポテンシャル，速度を求め、等ポテンシャル線，速度場を描く
5
6  border Gamma(t=0,2*pi) { x = cos(t); y = sin(t); } // 円盤領域
7  int m=40;
8  mesh Th=buildmesh(Gamma(m));
9  plot(Th, wait=1, ps="Th.eps");
10 // 次の2行は区分1次多項式を使うという意味
11 fespace Vh(Th,P1);
12 Vh phi, v, v1, v2;
13 // 境界条件の設定
14 func Vn=x+2*y; // Ωが単位円で，V=(1,2) のとき V・n=x+2y
15
16 // 速度ポテンシャルφを求め、その等高線（等ポテンシャル線）を描く
17 solve Laplace(phi,v) =
18   int2d(Th)(dx(phi)*dx(v)+dy(phi)*dy(v)) -int1d(Th,Gamma)(Vn*v);
19 plot(phi,ps="contourpotential.eps",wait=1);
20
21 // ベクトル場 (v1,v2)=∇φ を描く（ちょっと雑なやり方）
22 v1=dx(phi); v2=dy(phi);
23 plot([v1,v2],ps="vectorfield.eps",wait=1);
24
25 // 等ポテンシャル線とベクトル場を同時に描く
26 plot([v1,v2],phi,ps="both.eps", wait=1);
```

- 6行目で領域 Ω の境界 Γ を指定している。
- 8行目で、Γ を m 分割して、Γ の囲む範囲を三角形分割して、それを mesh 型の変数 Th に代入している。
- 11行目、有限要素空間 V_h を区分的1次関数の空間と定義している。この辺についてはこの講義では説明を省略する (知りたい人は有限要素法のテキストを読んで下さい)。
- 12行目、ϕ と試験関数 v, 流速ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ の成分 v_1, v_2 を、Vh の要素とする。
- 14行目、境界条件の設定をしている。ここで $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} = x + 2y$ とする理由は上の注意 (1) で説明した。
- 17〜18行目、弱形式の定義。ここを修正する必要が生じる可能性は低い。