

1 次分数変換についての定理

桂田 祐史

2021 年 5 月 11 日

一覧できるように抜き出してみた。自力で証明を清書して見るのは良い演習になる。

1. $a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0$ とする。 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ から $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ への写像を $c \neq 0$ のとき

$$\begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \ni z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \\ -\frac{d}{c} \mapsto \infty \\ \infty \mapsto -\frac{a}{c} \end{cases}$$

$c = 0$ のとき

$$\begin{cases} \mathbb{C} \ni z \mapsto \frac{az+b}{d} \\ \infty \mapsto \infty \end{cases}$$

で定義すると、1 対 1 かつ全射になる。これを一次分数変換という。

2. 一次分数変換の全体は写像の合成を積として群をつくる。任意の一次分数変換は拡大・縮小・回転・平行移動および $z \mapsto \frac{1}{z}$ から合成される。

3. 一次分数変換は円または直線を円または直線にうつす。

4. C を円または直線, D を C を境界とする領域 (円の内部 or 外部 or 半平面), f を一次分数変換とすると, $f(D)$ は $f(C)$ を境界とする領域で, z が C 上を D を左手に見る向きに動くとき, $f(z)$ は $f(C)$ 上を $f(D)$ を左手に見る向きにうごく。

5. C : 円または直線

P, P' : C に関して互いに鏡像の位置にある 2 点

f : 一次分数変換

$\Rightarrow f(P)$ と $f(P')$ は $f(C)$ に関して互いに鏡像の位置にある。

(P と P' が円 C に関して互いに鏡像の位置にあるとは, P と P' が円 C の中心 O から発する一本の半直線上にあって しかも $OP \cdot OP' = (\text{円 } C \text{ の半径})^2$ が成り立つこと。 P, P' が直線 C に関して互いに鏡像の位置にあるとは, P と P' が C に関して対称の位置にあること。円の中心と ∞ とはその円に関して鏡像の位置にあるとみなす。)

6. 一次分数変換は非調和比 (複比)

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \bigg/ \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}$$

をかえない。

7. 任意に与えられた異なる 3 点を任意に与えられた異なる 3 点にうつす一次分数変換が常に唯一つ存在する。
8. 相異なる 3 点 z_2, z_3, z_4 をそれぞれ $1, 0, \infty$ にうつす一次分数変換は何か？
9. 実直線 $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ を自分自身にうつす一次分数変換を特徴づけよ。
10. 単位円板 $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ を自分自身にうつす 1 次分数変換は、

$$z \mapsto \alpha \frac{z - \xi}{\bar{\xi}z - 1}, \quad |\alpha| = 1, \quad |\xi| < 1.$$

(注: 単位円盤を単位円盤に双正則に写すという条件から、1 次分数変換であることが導かれ、結局この形になる。)

11. 上半平面 $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ を単位円板にうつす一次分数変換は、

$$z \mapsto \alpha \frac{z - \beta}{z - \bar{\beta}}, \quad |\alpha| = 1, \quad \operatorname{Im} \beta > 0.$$

注 1~11 は勝手な順序でやってよい；循環論法に陥らない限り。

12. (Schwarz の補題) $f(z)$ が $|z| < 1$ で正則で、 $f(0) = 0$ かつ $|f(z)| \leq 1$ ($|z| < 1$) ならば、 $|f(z)| \leq |z|$ ($|z| < 1$)。更に $\{0 < |z| < 1\}$ の一点で $|f(z)| = |z|$ となることがあれば、 $f(z) = \alpha z$, $|\alpha| = 1$, と書ける。

13. 単位円板を単位円板に全単射にうつす正則関数は、問題 10 の 1 次分数変換に限る。