応用複素関数 第 9 回
～ ポテンシャル問題 (2) ～

かつらだ まさし
桂田 祐史

2021 年 6 月 15 日

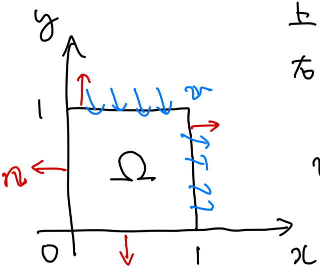
目次

本日の内容・連絡事項

- 有限要素法は、弱解の方法を一つの基礎としている (もう一つは領域の三角形分割に基づく区分的多項式の利用)。そこで Poisson 方程式を題材として、**弱解の方法を解説**する。FreeFem++ のプログラムに必要不可欠な**弱形式がどのように得られるか**、どういう意味を持つか、理解することを期待する。
- 繰り返しになるが、FreeFem++ はこの機会にぜひ体験してもらいたい (非常に幅広い応用がある)。インストールやサンプル・プログラムの実行でつっかえたら質問して下さい。
- レポート課題 2 を出します。締め切りは 7 月 12 日 (月)23:00。

  `http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/report2.pdf`

(今回の内容はきちんとやるのは大変だけど、分かるところだけでも栄養たっぷり。)



上の辺から水を入れる。

右の辺から水を出す。

$$v_n = v \cdot n = \begin{cases} -1 \quad -2 & (\text{上の辺}) \\ 1 \quad 2 & (\text{右の辺}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

$\Gamma = \partial \Omega$

注 $\int_\Gamma v_n \, d\sigma = 0$ が成立

v_n を場合分けして定義した。プログラムでもできる。

$$\int_\Gamma v_n v \, d\sigma = \int_{\text{上の辺}} (-1) \cdot v \, d\sigma + \int_{\text{右の辺}} 1 \cdot v \, d\sigma$$

4.7 弱解の方法　4.7.1 はじめに

今回用いる有限要素法は、今では微分方程式論で常識となっている**弱解の方法** (weak formulation) を応用したものである。

これは、Riemann が Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題を解くために用いた論法 (第 8 回授業参照) を発展させたものである。現在では様々な微分方程式に応用されているが、ここではもっとも基本的な Poisson 方程式の境界値問題について説明する (おおむね菊地 [1] に沿った解説)。

厳密に議論するには、**広義導関数**、いわゆる **Sobolev** (ソボレフ) **空間**を導入する必要がある。具体的には、後で出て来る X_{g_1} と X は、本当は Sobolev 空間の一種 $H^1(\Omega)$ を用いて

$$X_{g_1} := \left\{ w \in H^1(\Omega) \;\middle|\; w = g_1 \text{ on } \Gamma_1 \right\}, \quad X := \left\{ w \in H^1(\Omega) \;\middle|\; w = 0 \text{ on } \Gamma_1 \right\}$$

と定義すべきものである。ともあれ、ここでは関数の滑らかさに関する議論には目をつぶって議論する。

(Sobolev 空間を学ぶときは、Brezis [2], [3] をチェックしてみよう。)

4.7.2 Poisson 方程式の境界値問題 (P)

Laplace 方程式を一般化した Poisson 方程式の境界値問題を考える。

Ω は $\mathbb{R}^m$ $(m = 2, 3)$ の有界領域、$\Gamma := \partial\Omega$ は Ω の境界、Γ_1 と Γ_2 は

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma, \quad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$$

を満たす。また、$f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $g_1\colon \Gamma_1 \to \mathbb{R}$, $g_2\colon \Gamma_2 \to \mathbb{R}$ が与えられているとする。$\Gamma_1 = \emptyset$ (全周 Neumann) のときは $\displaystyle\int_{\Gamma_2} g_2\, d\sigma = 0$ を仮定する。

問題 (P)

Find u s.t.

$$-\triangle u = f \quad (\text{in } \Omega), \tag{1}$$

$$u = g_1 \quad (\text{on } \Gamma_1), \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g_2 \quad (\text{on } \Gamma_2). \tag{3}$$

4.7.3 弱定式化 (W) と変分問題 (V)

$$X_{g_1} := \left\{w \mid w\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R},\ w = g_1 \text{ on } \Gamma_1\right\}, \quad X := \left\{w \mid w\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R},\ w = 0 \text{ on } \Gamma_1\right\},$$

(4)
$$J[w] := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2\, d\boldsymbol{x} - \int_\Omega f\, w\, d\boldsymbol{x} - \int_{\Gamma_2} g_2\, w\, d\sigma \quad (w \in X_{g_1}).$$

とおく。次の 2 つの問題を考える。

(W)

Find $u \in X_{g_1}$ s.t.

(5)
$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega f\, v\, d\boldsymbol{x} + \int_{\Gamma_2} g_2\, v\, d\sigma \quad (v \in X).$$

(条件 (5) を**弱形式** (weak form) と呼ぶ。)

(V)

Find $u \in X_{g_1}$ s.t.

(6)
$$J[u] = \inf_{w \in X_{g_1}} J[w]. \qquad (\text{inf は結局は min})$$

(P), (W), (V) は、ほぼ同値な問題である。実際、次が成り立つ。

定理 9.1

1. u が (P) の解 $\Rightarrow$ u が (W) の解
2. u が (W) の解 $\Leftrightarrow$ u が (V) の解
3. u が (W) の解かつ u が C^2 級 $\Rightarrow$ u が (P) の解

(2) の証明のために補題を準備する (証明は単なる計算であるので省略する)。

補題 9.2

任意の $w \in X_{g_1}$, $v \in X$, $t \in \mathbb{R}$ に対して次式が成立する。

$$J[w+tv] = \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\,d\boldsymbol{x} + t\left(\int_\Omega \nabla w\cdot\nabla v\,d\boldsymbol{x} - \int_\Omega f\,v\,d\boldsymbol{x} - \int_{\Gamma_2} g_2\,v\,d\sigma\right) + J[w]. \tag{7}$$

4.7.5 (P) の解は (W) の解 — 弱形式の導出

(1) の証明　u が (P) の解と仮定する。(1) $-\triangle u = f$ に任意の $v \in X$ をかけて Ω 上で積分すると

$$-\int_\Omega \triangle u\, v\, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega fv\, d\boldsymbol{x}. \tag{8}$$

左辺を Green の公式 ([4]) を用いて変形してから、$v = 0$ (on Γ_1) と (3) $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = g_2$ を用いると

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega \triangle u\, v\, d\boldsymbol{x} &= -\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} v\, d\sigma + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, d\boldsymbol{x} \\
&= -\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\, v\, d\sigma - \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\, v\, d\sigma + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, d\boldsymbol{x} \\
&= -\int_{\Gamma_2} g_2\, v\, d\sigma + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, d\boldsymbol{x}.
\end{aligned}$$

(8) に代入して移項すると

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega f\, v\, d\boldsymbol{x} + \int_{\Gamma_2} g_2\, v\, d\sigma.$$

すなわち、u は弱形式を満たす ((W) の解である)。 □

4.7.6 (W) と (V) は同値

(2) の証明

[u が (V) の解 $\Rightarrow$ u は (W) の解]　(デジャブ？)

u は (V) の解とする。任意の $v \in X$ に対して、$f(t) := J[u+tv]$ $(t \in \mathbb{R})$ とおくと、

$$f(t) = J[u+tv] \geq J[u] = f(0).$$

ゆえに f は $t=0$ で最小になる。ゆえに $J[u+tv]$ の t の 1 次の項の係数は 0 である:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_\Omega f \, v \, dx - \int_{\Gamma_2} g_2 \, v \, d\sigma = 0.$$

ゆえに u は (W) の解である。[u が (W) の解 $\Rightarrow$ u は (V) の解]

u は (W) の解とする。任意の $w \in X_{g_1}$ に対して、$v := u - w$ とおくと $v \in X$ である。

$$\begin{aligned}
J[w] - J[u] &= J[u + 1 \cdot v] - J[u] \qquad (t=1 \text{ として補題 9.2 を適用}) \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx + \left(\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_\Omega f \, v \, dx - \int_{\Gamma_2} g_2 \, v \, d\sigma \right) \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx \geq 0.
\end{aligned}$$

ゆえに $J[u]$ は $J[w]$ の最小値である。すなわち u は (V) の解である。 □

4.7.7 (W) の解が滑らかならば (P) の解

(3) の証明　u が (W) の解であり、かつ十分滑らかと仮定する。(W) の解であるから、

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f\, v\, dx + \int_{\Gamma_2} g\, v\, d\sigma \quad (v \in X)$$

を満たす。さらに滑らかであるので、左辺に Green の公式が適用できて

$$(\star) \qquad \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial n} v\, d\sigma - \int_\Omega \triangle u\, v\, dx = \int_\Omega f\, v\, dx + \int_{\Gamma_2} g_2\, v\, d\sigma \quad (v \in X).$$

特に $v \in C_0^\infty(\Omega)$ の場合を考えると (境界上の積分が 0 なので)

$$-\int_\Omega \triangle u\, v\, dx = \int_\Omega f\, v\, dx \quad (v \in C_0^\infty(\Omega)).$$

変分法の基本補題より、

$$-\triangle u = f \quad (\text{in } \Omega).$$

これを $(\star)$ に代入すると

$$\int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial n} v\, d\sigma = \int_{\Gamma_2} g_2\, v\, d\sigma \quad (v \in X).$$

再び変分法の基本補題より、

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g_2 \quad (\text{on } \Gamma_2).$$

ゆえに u は (P) の解である。 証明終　　$\cdots\cdots\cdots$ 以上、Dirichlet 原理の一般化

4.7.8 定理の使い道

(P) の解を求めたり、一意的な存在を示したいわけであるが、代わりに (W) (あるいは (V)) を考える。

(W) の解の一意的な存在を示すのは比較的容易である。また (W) の近似解を求めるのも簡単である (有限要素法がまさにそれをしてくれる)。

(W) の解が本当に (P) の解であるか？が問題になる。言い換えると

(W) の解 u は滑らかだろうか？

この問は、一見細かいことのようだが、実はとても重要である。

良く知られた (部分的な) 解答

- Ω が C^2 級であれば (どういう意味？) Yes.
- Ω が多角形の場合、凸ならば Yes, 凸でないならば一般には No.

(FreeFem++ の例で、L 字型の領域や、立方体から小さい立方体を除いた領域がしばしば登場するが、このあたりのこと (領域の凸性) を問題にしているわけである。)

補足: 変分法の基本補題

「任意の」(実際には「何かの条件を満たすすべての」) 関数 φ について $\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx = 0$ が成り立つならば、$f = 0$ (in Ω), という形の命題を**変分法の基本補題** (fundamental lemma of calculs of variations) という。

色々なバージョンがあるが、次の形のもので用が足りることが多い。

命題 9.3 (変分法の基本補題)

Ω は $\mathbb{R}^n$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は局所可積分関数で

$$(\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)) \quad \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx = 0$$

を満たすならば

$$f = 0 \quad (\text{a.e. on } \Omega).$$

Ω で局所可積分とは、Ω に含まれる任意のコンパクト集合上で Lebesgue 積分可能ということ。

$\{x \in \Omega \mid u(x) \neq 0\}$ の閉包がコンパクトで Ω に含まれるような $u \in C^\infty(\Omega)$ の全体を $C_0^\infty(\Omega)$ と表す。

$f = 0$ (a.e on Ω) とは、Ω に含まれるある測度 0 の集合 N を除いて $f = 0$ ということ。

補足: $C_0^\infty(\Omega)$

(準備中)

参考文献

[1] 菊地文雄：有限要素法概説, サイエンス社 (1980), 新訂版 1999.

[2] Brezis, H.: 関数解析, 産業図書 (1988), (藤田 宏, 小西 芳雄 訳), 原著は版を改めて、より内容豊富になっています。

[3] Brezis, H.: *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer (2011).

[4] 桂田祐史：ベクトル解析早見表, `http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/applied-complex-function-2021/vector_analysis.pdf` (2021/5/31).