応用複素関数 第 9 回

～ ポテンシャル問題 (2) ～

かつらだ まさし
桂田 祐史

2021 年 6 月 15 日

目次

本日の内容・連絡事項

本日の内容・連絡事項

- 有限要素法は、弱解の方法を一つの基礎としている (もう一つは領域の三角形分割に基づく区分的多項式の利用)。そこで Poisson 方程式を題材として、**弱解の方法を解説**する。FreeFem++ のプログラムに必要不可欠な**弱形式がどのように得られるか**、どういう意味を持つか、理解することを期待する。

本日の内容・連絡事項

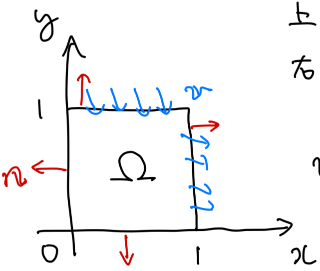
- 有限要素法は、弱解の方法を一つの基礎としている (もう一つは領域の三角形分割に基づく区分的多項式の利用)。そこで Poisson 方程式を題材として、**弱解の方法を解説**する。FreeFem++ のプログラムに必要不可欠な**弱形式がどのように得られるか**、どういう意味を持つか、理解することを期待する。
- 繰り返しになるが、FreeFem++ はこの機会にぜひ体験してもらいたい (非常に幅広い応用がある)。インストールやサンプル・プログラムの実行でつっかえたら質問して下さい。

本日の内容・連絡事項

- 有限要素法は、弱解の方法を一つの基礎としている (もう一つは領域の三角形分割に基づく区分的多項式の利用)。そこで Poisson 方程式を題材として、**弱解の方法を解説**する。FreeFem++ のプログラムに必要不可欠な**弱形式がどのように得られるか**、どういう意味を持つか、理解することを期待する。
- 繰り返しになるが、FreeFem++ はこの機会にぜひ体験してもらいたい (非常に幅広い応用がある)。インストールやサンプル・プログラムの実行でつっかえたら質問して下さい。
- レポート課題 2 を出します。締め切りは 7 月 12 日 (月)23:00。

  `http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/report2.pdf`

(今回の内容はきちんとやるのは大変だけど、分かるところだけでも栄養たっぷり。)



上の辺から水を入れる.

右の辺から水を出す.

$$v_n = v \cdot n = \begin{cases} -1 \quad -2 & (上の辺) \\ 1 \quad 2 & (右の辺) \\ 0 & (その他) \end{cases}$$

$\Gamma = \partial\Omega$

注 $\displaystyle\int_\Gamma v_n \, d\sigma = 0$ が成立

v_n を場合分けして定義した。プログラムでもできる。

$$\int_\Gamma v_n v \, d\sigma = \int_{上の辺} (-1) \cdot v \, d\sigma + \int_{右の辺} 1 \cdot v \, d\sigma$$

4.7 弱解の方法　4.7.1 はじめに

4.7 弱解の方法　4.7.1 はじめに

今回用いる有限要素法は、今では微分方程式論で常識となっている**弱解の方法** (weak formulation) を応用したものである。

4.7 弱解の方法　4.7.1 はじめに

今回用いる有限要素法は、今では微分方程式論で常識となっている**弱解の方法** (weak formulation) を応用したものである。

これは、Riemann が Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題を解くために用いた論法 (第 8 回授業参照) を発展させたものである。現在では様々な微分方程式に応用されているが、ここではもっとも基本的な Poisson 方程式の境界値問題について説明する (おおむね菊地 [1] に沿った解説)。

4.7 弱解の方法　4.7.1 はじめに

今回用いる有限要素法は、今では微分方程式論で常識となっている**弱解の方法** (weak formulation) を応用したものである。

これは、Riemann が Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題を解くために用いた論法 (第 8 回授業参照) を発展させたものである。現在では様々な微分方程式に応用されているが、ここではもっとも基本的な Poisson 方程式の境界値問題について説明する (おおむね菊地 [1] に沿った解説)。

厳密に議論するには、**広義導関数**、いわゆる **Sobolev**（ソボレフ）**空間**を導入する必要がある。具体的には、後で出て来る X_{g_1} と X は、本当は Sobolev 空間の一種 $H^1(\Omega)$ を用いて

$$X_{g_1} := \left\{ w \in H^1(\Omega) \;\middle|\; w = g_1 \text{ on } \Gamma_1 \right\}, \quad X := \left\{ w \in H^1(\Omega) \;\middle|\; w = 0 \text{ on } \Gamma_1 \right\}$$

と定義すべきものである。ともあれ、ここでは関数の滑らかさに関する議論には目をつぶって議論する。

(Sobolev 空間を学ぶときは、Brezis [2], [3] をチェックしてみよう。)

4.7.2 Poisson 方程式の境界値問題 (P)

Laplace 方程式を一般化した Poisson 方程式の境界値問題を考える。

Ω は $\mathbb{R}^m$ $(m = 2, 3)$ の有界領域、$\Gamma := \partial\Omega$ は Ω の境界、Γ_1 と Γ_2 は

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma, \quad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$$

を満たす。また、$f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $g_1\colon \Gamma_1 \to \mathbb{R}$, $g_2\colon \Gamma_2 \to \mathbb{R}$ が与えられているとする。$\Gamma_1 = \emptyset$ (全周 Neumann) のときは $\displaystyle\int_{\Gamma_2} g_2\, d\sigma = 0$ を仮定する。

問題 (P)

Find u s.t.

$$-\triangle u = f \quad (\text{in } \Omega), \tag{1}$$

$$u = g_1 \quad (\text{on } \Gamma_1), \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g_2 \quad (\text{on } \Gamma_2). \tag{3}$$

4.7.3 弱定式化 (W) と変分問題 (V)

4.7.3 弱定式化 (W) と変分問題 (V)

$$X_{g_1} := \left\{ w \;\middle|\; w\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R},\ w = g_1 \text{ on } \Gamma_1 \right\}, \quad X := \left\{ w \;\middle|\; w\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R},\ w = 0 \text{ on } \Gamma_1 \right\},$$

$$(4) \qquad J[w] := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2\, d\boldsymbol{x} - \int_\Omega f\, w\, d\boldsymbol{x} - \int_{\Gamma_2} g_2\, w\, d\sigma \quad (w \in X_{g_1}).$$

とおく。次の 2 つの問題を考える。

4.7.3 弱定式化 (W) と変分問題 (V)

$$X_{g_1} := \left\{ w \;\middle|\; w\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R},\ w = g_1 \text{ on } \Gamma_1 \right\}, \quad X := \left\{ w \;\middle|\; w\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R},\ w = 0 \text{ on } \Gamma_1 \right\},$$

$$J[w] := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2\, d\boldsymbol{x} - \int_\Omega f\, w\, d\boldsymbol{x} - \int_{\Gamma_2} g_2\, w\, d\sigma \quad (w \in X_{g_1}). \tag{4}$$

とおく。次の 2 つの問題を考える。

(W)

Find $u \in X_{g_1}$ s.t.

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega f\, v\, d\boldsymbol{x} + \int_{\Gamma_2} g_2\, v\, d\sigma \quad (v \in X). \tag{5}$$

(条件 (5) を**弱形式 (weak form)** と呼ぶ。)

4.7.3 弱定式化 (W) と変分問題 (V)

$$X_{g_1} := \left\{ w \;\middle|\; w\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R},\ w = g_1 \text{ on } \Gamma_1 \right\}, \quad X := \left\{ w \;\middle|\; w\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R},\ w = 0 \text{ on } \Gamma_1 \right\},$$

(4)
$$J[w] := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2\, d\boldsymbol{x} - \int_\Omega f\, w\, d\boldsymbol{x} - \int_{\Gamma_2} g_2\, w\, d\sigma \quad (w \in X_{g_1}).$$

とおく。次の 2 つの問題を考える。

(W)

Find $u \in X_{g_1}$ s.t.

(5)
$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega f\, v\, d\boldsymbol{x} + \int_{\Gamma_2} g_2\, v\, d\sigma \quad (v \in X).$$

(条件 (5) を**弱形式 (weak form)** と呼ぶ。)

(V)

Find $u \in X_{g_1}$ s.t.

(6)
$$J[u] = \inf_{w \in X_{g_1}} J[w]. \qquad \text{(inf は結局は min)}$$

4.7.4 3つの問題 (P), (W), (V) の同等性

(P), (W), (V) は、ほぼ同値な問題である。

4.7.4 3つの問題 (P), (W), (V) の同等性

(P), (W), (V) は、ほぼ同値な問題である。実際、次が成り立つ。

定理 9.1

1. u が (P) の解 $\Rightarrow$ u が (W) の解
2. u が (W) の解 $\Leftrightarrow$ u が (V) の解
3. u が (W) の解かつ u が C^2 級 $\Rightarrow$ u が (P) の解

4.7.4 3つの問題 (P), (W), (V) の同等性

(P), (W), (V) は、ほぼ同値な問題である。実際、次が成り立つ。

定理 9.1

1. u が (P) の解 $\Rightarrow$ u が (W) の解
2. u が (W) の解 $\Leftrightarrow$ u が (V) の解
3. u が (W) の解かつ u が C^2 級 $\Rightarrow$ u が (P) の解

(2) の証明のために補題を準備する (証明は単なる計算であるので省略する)。

補題 9.2

任意の $w \in X_{g_1}$, $v \in X$, $t \in \mathbb{R}$ に対して次式が成立する。

$$
\begin{aligned}
(7) \qquad J[w + tv] = \frac{t^2}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 \, d\boldsymbol{x} \\
+ t \left(\int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v \, d\boldsymbol{x} - \int_\Omega f \, v \, d\boldsymbol{x} - \int_{\Gamma_2} g_2 \, v \, d\sigma \right) + J[w].
\end{aligned}
$$

4.7.5 (P) の解は (W) の解 — 弱形式の導出

(1) の証明　u が (P) の解と仮定する。(1) $-\triangle u = f$ に任意の $v \in X$ をかけて Ω 上で積分すると

$$-\int_\Omega \triangle u\, v\, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega f v\, d\boldsymbol{x}. \tag{8}$$

4.7.5 (P) の解は (W) の解 — 弱形式の導出

(1) の証明　u が (P) の解と仮定する。(1) $-\triangle u = f$ に任意の $v \in X$ をかけて Ω 上で積分すると

(8)
$$-\int_\Omega \triangle u\, v\, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega fv\, d\boldsymbol{x}.$$

左辺を Green の公式 ([4]) を用いて変形してから、$v = 0$ (on Γ_1) と (3) $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = g_2$ を用いると

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega \triangle u\, v\, d\boldsymbol{x} &= -\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} v\, d\sigma + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, d\boldsymbol{x} \\
&= -\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\, v\, d\sigma - \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\, v\, d\sigma + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, d\boldsymbol{x} \\
&= -\int_{\Gamma_2} g_2\, v\, d\sigma + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, d\boldsymbol{x}.
\end{aligned}$$

4.7.5 (P) の解は (W) の解 — 弱形式の導出

(1) の証明　u が (P) の解と仮定する。(1) $-\triangle u = f$ に任意の $v \in X$ をかけて Ω 上で積分すると

$$-\int_\Omega \triangle u\, v\, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega fv\, d\boldsymbol{x}. \tag{8}$$

左辺を Green の公式 ([4]) を用いて変形してから、$v = 0$ (on Γ_1) と (3) $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = g_2$ を用いると

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega \triangle u\, v\, d\boldsymbol{x} &= -\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} v\, d\sigma + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, d\boldsymbol{x} \\
&= -\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} v\, d\sigma - \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} v\, d\sigma + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, d\boldsymbol{x} \\
&= -\int_{\Gamma_2} g_2\, v\, d\sigma + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, d\boldsymbol{x}.
\end{aligned}$$

(8) に代入して移項すると

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega f\, v\, d\boldsymbol{x} + \int_{\Gamma_2} g_2\, v\, d\sigma.$$

すなわち、u は弱形式を満たす ((W) の解である)。

(2) の証明

[u が (V) の解 $\Rightarrow$ u は (W) の解]　(デジャブ？)

u は (V) の解とする。任意の $v \in X$ に対して、$f(t) := J[u+tv]$ $(t \in \mathbb{R})$ とおくと、

$$f(t) = J[u+tv] \geq J[u] = f(0).$$

ゆえに f は $t = 0$ で最小になる。ゆえに $J[u+tv]$ の t の 1 次の項の係数は 0 である:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_\Omega f \, v \, dx - \int_{\Gamma_2} g_2 \, v \, d\sigma = 0.$$

ゆえに u は (W) の解である。

(2) の証明

[u が (V) の解 $\Rightarrow$ u は (W) の解] (デジャブ?)

u は (V) の解とする。任意の $v \in X$ に対して、$f(t) := J[u+tv]$ ($t \in \mathbb{R}$) とおくと、

$$f(t) = J[u+tv] \geq J[u] = f(0).$$

ゆえに f は $t=0$ で最小になる。ゆえに $J[u+tv]$ の t の 1 次の項の係数は 0 である:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_\Omega f \, v \, dx - \int_{\Gamma_2} g_2 \, v \, d\sigma = 0.$$

ゆえに u は (W) の解である。[u が (W) の解 $\Rightarrow$ u は (V) の解]

u は (W) の解とする。任意の $w \in X_{g_1}$ に対して、$v := u - w$ とおくと $v \in X$ である。

$$\begin{aligned} J[w] - J[u] &= J[u + 1 \cdot v] - J[u] \qquad (t = 1 \text{ として補題 9.2 を適用}) \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx + \left(\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_\Omega f \, v \, dx - \int_{\Gamma_2} g_2 \, v \, d\sigma \right) \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx \geq 0. \end{aligned}$$

ゆえに $J[u]$ は $J[w]$ の最小値である。すなわち u は (V) の解である。

4.7.7 (W) の解が滑らかならば (P) の解

(3) の証明　u が (W) の解であり、かつ十分滑らかと仮定する。(W) の解であるから、

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f \, v \, dx + \int_{\Gamma_2} g \, v \, d\sigma \quad (v \in X)$$

を満たす。

(3) の証明　u が (W) の解であり、かつ十分滑らかと仮定する。(W) の解であるから、

$$\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,d\boldsymbol{x}=\int_\Omega f\,v\,d\boldsymbol{x}+\int_{\Gamma_2} g\,v\,d\sigma\quad(v\in X)$$

を満たす。さらに滑らかであるので、左辺に Green の公式が適用できて

$$(\star)\qquad \int_{\Gamma_2}\frac{\partial u}{\partial n}\,v\,d\sigma-\int_\Omega \triangle u\,v\,d\boldsymbol{x}=\int_\Omega f\,v\,d\boldsymbol{x}+\int_{\Gamma_2} g_2\,v\,d\sigma\quad(v\in X).$$

4.7.7 (W) の解が滑らかならば (P) の解

(3) の証明　u が (W) の解であり、かつ十分滑らかと仮定する。(W) の解であるから、

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega f \, v \, d\boldsymbol{x} + \int_{\Gamma_2} g \, v \, d\sigma \quad (v \in X)$$

を満たす。さらに滑らかであるので、左辺に Green の公式が適用できて

$$(\star) \qquad \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\sigma - \int_\Omega \triangle u \, v \, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega f \, v \, d\boldsymbol{x} + \int_{\Gamma_2} g_2 \, v \, d\sigma \quad (v \in X).$$

特に $v \in C_0^\infty(\Omega)$ の場合を考えると (境界上の積分が 0 なので)

$$-\int_\Omega \triangle u \, v \, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega f \, v \, d\boldsymbol{x} \quad (v \in C_0^\infty(\Omega)).$$

4.7.7 (W) の解が滑らかならば (P) の解

(3) の証明　u が (W) の解であり、かつ十分滑らかと仮定する。(W) の解であるから、

$$\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\, dx = \int_\Omega f\, v\, dx + \int_{\Gamma_2} g\, v\, d\sigma \quad (v\in X)$$

を満たす。さらに滑らかであるので、左辺に Green の公式が適用できて

$$(\star)\qquad \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial n} v\, d\sigma - \int_\Omega \triangle u\, v\, dx = \int_\Omega f\, v\, dx + \int_{\Gamma_2} g_2\, v\, d\sigma \quad (v\in X).$$

特に $v\in C_0^\infty(\Omega)$ の場合を考えると (境界上の積分が 0 なので)

$$-\int_\Omega \triangle u\, v\, dx = \int_\Omega f\, v\, dx \quad (v\in C_0^\infty(\Omega)).$$

変分法の基本補題より、

$$-\triangle u = f \quad (\text{in } \Omega).$$

4.7.7 (W) の解が滑らかならば (P) の解

(3) の証明　u が (W) の解であり、かつ十分滑らかと仮定する。(W) の解であるから、

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx = \int_\Omega f\, v\, dx + \int_{\Gamma_2} g\, v\, d\sigma \quad (v \in X)$$

を満たす。さらに滑らかであるので、左辺に Green の公式が適用できて

$$(\star) \qquad \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial n} v\, d\sigma - \int_\Omega \triangle u\, v\, dx = \int_\Omega f\, v\, dx + \int_{\Gamma_2} g_2\, v\, d\sigma \quad (v \in X).$$

特に $v \in C_0^\infty(\Omega)$ の場合を考えると (境界上の積分が 0 なので)

$$-\int_\Omega \triangle u\, v\, dx = \int_\Omega f\, v\, dx \quad (v \in C_0^\infty(\Omega)).$$

変分法の基本補題より、

$$-\triangle u = f \quad (\text{in } \Omega).$$

これを $(\star)$ に代入すると

$$\int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial n} v\, d\sigma = \int_{\Gamma_2} g_2\, v\, d\sigma \quad (v \in X).$$

4.7.7 (W) の解が滑らかならば (P) の解

(3) の証明　u が (W) の解であり、かつ十分滑らかと仮定する。(W) の解であるから、

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f\, v \, dx + \int_{\Gamma_2} g\, v \, d\sigma \quad (v \in X)$$

を満たす。さらに滑らかであるので、左辺に Green の公式が適用できて

$$(\star) \qquad \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\sigma - \int_\Omega \triangle u \, v \, dx = \int_\Omega f\, v \, dx + \int_{\Gamma_2} g_2\, v \, d\sigma \quad (v \in X).$$

特に $v \in C_0^\infty(\Omega)$ の場合を考えると (境界上の積分が 0 なので)

$$-\int_\Omega \triangle u \, v \, dx = \int_\Omega f\, v \, dx \quad (v \in C_0^\infty(\Omega)).$$

変分法の基本補題より、

$$-\triangle u = f \quad (\text{in } \Omega).$$

これを $(\star)$ に代入すると

$$\int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\sigma = \int_{\Gamma_2} g_2\, v \, d\sigma \quad (v \in X).$$

再び変分法の基本補題より、

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g_2 \quad (\text{on } \Gamma_2).$$

ゆえに u は (P) の解である。 証明終　　……… 以上、Dirichlet 原理の一般化

4.7.8 定理の使い道

(P) の解を求めたり、一意的な存在を示したいわけであるが、代わりに (W) (あるいは (V)) を考える。

4.7.8 定理の使い道

(P) の解を求めたり、一意的な存在を示したいわけであるが、代わりに (W) (あるいは (V)) を考える。

(W) の解の一意的な存在を示すのは比較的容易である。また (W) の近似解を求めるのも簡単である (有限要素法がまさにそれをしてくれる)。

4.7.8 定理の使い道

(P) の解を求めたり、一意的な存在を示したいわけであるが、代わりに (W) (あるいは (V)) を考える。

(W) の解の一意的な存在を示すのは比較的容易である。また (W) の近似解を求めるのも簡単である (有限要素法がまさにそれをしてくれる)。

(W) の解が本当に (P) の解であるか？が問題になる。言い換えると

(W) の解 u は滑らかだろうか？

4.7.8 定理の使い道

(P) の解を求めたり、一意的な存在を示したいわけであるが、代わりに (W) (あるいは (V)) を考える。

(W) の解の一意的な存在を示すのは比較的容易である。また (W) の近似解を求めるのも簡単である (有限要素法がまさにそれをしてくれる)。

(W) の解が本当に (P) の解であるか？が問題になる。言い換えると

(W) の解 u は滑らかだろうか？

この問は、一見細かいことのようだが、実はとても重要である。

4.7.8 定理の使い道

(P) の解を求めたり、一意的な存在を示したいわけであるが、代わりに (W) (あるいは (V)) を考える。

(W) の解の一意的な存在を示すのは比較的容易である。また (W) の近似解を求めるのも簡単である (有限要素法がまさにそれをしてくれる)。

(W) の解が本当に (P) の解であるか？が問題になる。言い換えると

(W) の解 u は滑らかだろうか？

この問は、一見細かいことのようだが、実はとても重要である。

良く知られた (部分的な) 解答

- Ω が C^2 級であれば (どういう意味？) Yes.
- Ω が多角形の場合、凸ならば Yes, 凸でないならば一般には No.

4.7.8 定理の使い道

(P) の解を求めたり、一意的な存在を示したいわけであるが、代わりに (W) (あるいは (V)) を考える。

(W) の解の一意的な存在を示すのは比較的容易である。また (W) の近似解を求めるのも簡単である (有限要素法がまさにそれをしてくれる)。

(W) の解が本当に (P) の解であるか？が問題になる。言い換えると

(W) の解 u は滑らかだろうか？

この問は、一見細かいことのようだが、実はとても重要である。

良く知られた (部分的な) 解答

- Ω が C^2 級であれば (どういう意味？) Yes.
- Ω が多角形の場合、凸ならば Yes, 凸でないならば一般には No.

(FreeFem++ の例で、L 字型の領域や、立方体から小さい立方体を除いた領域がしばしば登場するが、このあたりのこと (領域の凸性) を問題にしているわけである。)

補足: 変分法の基本補題

「任意の」(実際には「何かの条件を満たすすべての」) 関数 φ について $\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx = 0$ が成り立つならば、$f = 0$ (in Ω), という形の命題を**変分法の基本補題** (fundamental lemma of calculs of variations) という。

色々なバージョンがあるが、次の形のもので用が足りることが多い。

命題 9.3 (変分法の基本補題)

Ω は $\mathbb{R}^n$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は局所可積分関数で

$$(\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)) \quad \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx = 0$$

を満たすならば

$$f = 0 \quad \text{(a.e. on } \Omega).$$

Ω で局所可積分とは、Ω に含まれる任意のコンパクト集合上で Lebesgue 積分可能ということ。

$\{x \in \Omega \mid u(x) \neq 0\}$ の閉包がコンパクトで Ω に含まれるような $u \in C^\infty(\Omega)$ の全体を $C_0^\infty(\Omega)$ と表す。

$f = 0$ (a.e on Ω) とは、Ω に含まれるある測度 0 の集合 N を除いて $f = 0$ ということ。

補足: $C_0^\infty(\Omega)$

(準備中)

参考文献

[1] 菊地文雄：有限要素法概説, サイエンス社 (1980), 新訂版 1999.

[2] Brezis, H.: 関数解析, 産業図書 (1988), (藤田 宏, 小西 芳雄 訳), 原著は版を改めて、より内容豊富になっています。

[3] Brezis, H.: *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer (2011).

[4] 桂田祐史：ベクトル解析早見表, `http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/applied-complex-function-2021/vector_analysis.pdf` (2021/5/31).