応用複素関数 第 8 回

～ ポテンシャル問題 (1) ～

かつらだ　まさし
桂田 祐史

2021 年 6 月 8 日

目次

本日の内容・連絡事項

- **ポテンシャル問題** (Laplace 方程式の境界値問題, 日本語？) を解説する。
  - 関数論で基本的な **Riemann の写像定理** (領域の写像関数の存在定理) を紹介 (復習) し、ポテシャル問題との関係について論じる。
  - ポテンシャル問題が、ある変分問題に帰着されるという **Dirichlet の原理**を説明する。
  - Dirichlet の原理と関連して、**有限要素法**を紹介する。
  - 有限要素法を用いて偏微分方程式を解くソフトウェアである **FreeFem++** を紹介し、ポテンシャル流を求めるプログラムを例にあげる。

— 以上内容が多く、やや複雑であるが、コンピューターで色々な結果を見られるので、理解するのはそれほど難しくないであろう (と期待する)。

本日の内容・連絡事項

- **ポテンシャル問題** (Laplace 方程式の境界値問題, 日本語？) を解説する。
  - 関数論で基本的な **Riemann の写像定理** (領域の写像関数の存在定理) を紹介 (復習) し、ポテシャル問題との関係について論じる。
  - ポテンシャル問題が、ある変分問題に帰着されるという **Dirichlet の原理**を説明する。
  - Dirichlet の原理と関連して、**有限要素法**を紹介する。
  - 有限要素法を用いて偏微分方程式を解くソフトウェアである **FreeFem++** を紹介し、ポテンシャル流を求めるプログラムを例にあげる。

— 以上内容が多く、やや複雑であるが、コンピューターで色々な結果を見られるので、理解するのはそれほど難しくないであろう (と期待する)。

- FreeFem++ はぜひ体験してもらいたい (単位取得のために必須ではないが)。インストールやプログラムの実行でつっかえたら質問して下さい。

本日の内容・連絡事項

- **ポテンシャル問題** (Laplace 方程式の境界値問題，日本語？) を解説する。
  - 関数論で基本的な **Riemann の写像定理** (領域の写像関数の存在定理) を紹介 (復習) し、ポテシャル問題との関係について論じる。
  - ポテンシャル問題が、ある変分問題に帰着されるという **Dirichlet の原理**を説明する。
  - Dirichlet の原理と関連して、**有限要素法**を紹介する。
  - 有限要素法を用いて偏微分方程式を解くソフトウェアである **FreeFem++** を紹介し、ポテンシャル流を求めるプログラムを例にあげる。

— 以上内容が多く、やや複雑であるが、コンピューターで色々な結果を見られるので、理解するのはそれほど難しくないであろう (と期待する)。

- FreeFem++ はぜひ体験してもらいたい (単位取得のために必須ではないが)。インストールやプログラムの実行でつっかえたら質問して下さい。
- レポート課題 2(案) を出します (〆切は 7 月 12 日 23:00)。

4 ポテンシャル問題

4.1 はじめに

まず復習から。非圧縮渦なし (ポテンシャル) 流の速度ポテンシャル ϕ は次を満たす (第 6 回授業)。

$$\triangle \phi = 0 \qquad (\text{in } \Omega) \tag{1}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{n}} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \qquad (\text{on } \partial\Omega). \tag{2}$$

まず復習から。非圧縮渦なし (ポテンシャル) 流の速度ポテンシャル ϕ は次を満たす (第 6 回授業)。

$$\triangle\phi = 0 \quad (\text{in } \Omega) \tag{1}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial \boldsymbol{n}} = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} \quad (\text{on } \partial\Omega). \tag{2}$$

$\partial\Omega$ 上の $\boldsymbol{v}$ が分かれば、(1), (2) は、Laplace 方程式の Neumann 境界値問題である。(かなり一般的な条件下で) 定数差を除いて一意的に解が存在する。

まず復習から。非圧縮渦なし (ポテンシャル) 流の速度ポテンシャル ϕ は次を満たす (第 6 回授業)。

$$(1) \qquad \triangle\phi = 0 \qquad (\text{in } \Omega)$$

$$(2) \qquad \frac{\partial\phi}{\partial \boldsymbol{n}} = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} \qquad (\text{on } \partial\Omega).$$

$\partial\Omega$ 上の $\boldsymbol{v}$ が分かれば、(1), (2) は、Laplace 方程式の Neumann 境界値問題である。(かなり一般的な条件下で) 定数差を除いて一意的に解が存在する。

ϕ が求まれば、$\boldsymbol{v} = \operatorname{grad}\phi$ により $\boldsymbol{v}$ が得られ、流れが決定される。

$\partial\Omega$ 上の $\boldsymbol{v}$ さえ分かれば、(1), (2) を解いて流れが求まる。

まず復習から。非圧縮渦なし (ポテンシャル) 流の速度ポテンシャル ϕ は次を満たす (第 6 回授業)。

$$(1) \qquad \triangle\phi = 0 \qquad (\text{in } \Omega)$$

$$(2) \qquad \frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} \qquad (\text{on } \partial\Omega).$$

$\partial\Omega$ 上の $\boldsymbol{v}$ が分かれば、(1), (2) は、Laplace 方程式の Neumann 境界値問題である。(かなり一般的な条件下で) 定数差を除いて一意的に解が存在する。

ϕ が求まれば、$\boldsymbol{v} = \operatorname{grad}\phi$ により $\boldsymbol{v}$ が得られ、流れが決定される。

$\partial\Omega$ 上の $\boldsymbol{v}$ さえ分かれば、(1), (2) を解いて流れが求まる。

前回既知の正則関数を組み合わせることで色々な 2 次元流れを表す、という手法を紹介した。例えば円柱周りの一様流の問題などを解いた。扱える問題の範囲が異なり、どちらが優れているとも言えないが、こちらの方法の有効性を想像するのは難しくないであろう (実際、とても強力である)。

4.2 Poisson 方程式の境界値問題　(その重要性の説明)

Laplace 方程式の境界値問題 (1), (2) を少し一般化する。

Ω は $\mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ の領域、$\Gamma := \partial\Omega$ は

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \quad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$$

と分割されていて、$f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $g_1\colon \Gamma_1 \to \mathbb{R}$, $g_2\colon \Gamma_2 \to \mathbb{R}$ が与えられたとする。また $\boldsymbol{n}$ は、Γ_2 上の点における外向き単位法線ベクトルとする。

このとき $u\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ で、次の方程式を満たすものを求めることを考える。

$$-\triangle u = f \quad (\text{in } \Omega) \tag{3}$$

$$u = g_1 \quad (\text{on } \Gamma_1) \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = g_2 \quad (\text{on } \Gamma_2). \tag{5}$$

(3) は有名な **Poisson方程式**(ポアソン)である。

(4), (5) はそれぞれDirichlet(ディリクレ)境界条件, Neumann(ノイマン)境界条件と呼ばれる。

4.2 Poisson 方程式の境界値問題　(その重要性の説明)

Poisson 方程式は、楕円型偏微分方程式の典型例であり、様々な現象のモデルに登場する。

重力場	f は (質量分布の) 密度, ϕ はポテンシャル・エネルギー
静電場	f は電荷密度, ϕ は電位
熱平衡	f が発生する熱量, ϕ は温度

4.2 Poisson 方程式の境界値問題　(その重要性の説明)

Poisson 方程式は、楕円型偏微分方程式の典型例であり、様々な現象のモデルに登場する。

重力場	f は (質量分布の) 密度, ϕ はポテンシャル・エネルギー
静電場	f は電荷密度, ϕ は電位
熱平衡	f が発生する熱量, ϕ は温度

この問題は数学的に非常に詳しく研究されてきた。一般に解の存在が証明できたのは 20 世紀に入ってからである。

4.2 Poisson 方程式の境界値問題　(その重要性の説明)

Poisson 方程式は、楕円型偏微分方程式の典型例であり、様々な現象のモデルに登場する。

重力場	f は (質量分布の) 密度, ϕ はポテンシャル・エネルギー
静電場	f は電荷密度, ϕ は電位
熱平衡	f が発生する熱量, ϕ は温度

この問題は数学的に非常に詳しく研究されてきた。一般に解の存在が証明できたのは 20 世紀に入ってからである。

その中でも $f = 0$ の場合 (Laplace 方程式 $\triangle u = 0$) がとりわけ重要である。これは関数論においても、多くの基本的な結果を得るための基礎となる (調和関数を決定する問題だから)。

4.2 Poisson 方程式の境界値問題　(その重要性の説明)

Poisson 方程式は、楕円型偏微分方程式の典型例であり、様々な現象のモデルに登場する。

重力場	f は (質量分布の) 密度, ϕ はポテンシャル・エネルギー
静電場	f は電荷密度, ϕ は電位
熱平衡	f が発生する熱量, ϕ は温度

この問題は数学的に非常に詳しく研究されてきた。一般に解の存在が証明できたのは 20 世紀に入ってからである。

その中でも $f=0$ の場合 (Laplace 方程式 $\triangle u=0$) がとりわけ重要である。これは関数論においても、多くの基本的な結果を得るための基礎となる (調和関数を決定する問題だから)。

ポテンシャル問題には、**差分法** (FDM, finite difference method)、**有限要素法** (FEM, finite element method) をはじめとする多くの数値計算法が適用できる。特に Laplace 方程式の場合は、**基本解の方法** (method of fundamental solution) が有力である。

4.3 Riemann の写像定理

関数論で基本的な Riemann の写像定理を復習しよう (第 4 回 1 次分数変換で紹介済み)。

4.3 Riemann の写像定理

関数論で基本的な Riemann の写像定理を復習しよう (第 4 回 1 次分数変換で紹介済み)。

定義 8.1 (双正則)

U と V は $\mathbb{C}$ の領域, $\varphi\colon U \to V$ とする。φ が**双正則**であるとは、φ が正則かつ全単射かつ φ^{-1} も正則であることをいう。

数学では、しばしば同型写像, 同型という概念が登場する。双正則写像は関数論としての同型写像と言える。

4.3 Riemann の写像定理

関数論で基本的な Riemann の写像定理を復習しよう (第 4 回 1 次分数変換で紹介済み)。

定義 8.1 (双正則)

U と V は $\mathbb{C}$ の領域, $\varphi\colon U \to V$ とする。φ が**双正則**であるとは、φ が正則かつ全単射かつ φ^{-1} も正則であることをいう。

数学では、しばしば同型写像, 同型という概念が登場する。双正則写像は関数論としての同型写像と言える。

定理 8.2 (Riemann の写像定理, 1851 年)

Ω は $\mathbb{C}$ の単連結領域で、$\Omega \neq \mathbb{C}$ であるとする。このとき双正則写像 $\varphi\colon \Omega \to D(0;1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ が存在する。

証明は省略する (例えば Ahlfors [1], 高橋 [2] を見よ)。

4.3 Riemann の写像定理

関数論で基本的な Riemann の写像定理を復習しよう (第 4 回 1 次分数変換で紹介済み)。

定義 8.1 (双正則)

U と V は $\mathbb{C}$ の領域, $\varphi\colon U \to V$ とする。φ が**双正則**であるとは、φ が正則かつ全単射かつ φ^{-1} も正則であることをいう。

数学では、しばしば同型写像, 同型という概念が登場する。双正則写像は関数論としての同型写像と言える。

定理 8.2 (Riemann の写像定理, 1851 年)

Ω は $\mathbb{C}$ の単連結領域で、$\Omega \neq \mathbb{C}$ であるとする。このとき双正則写像 $\varphi\colon \Omega \to D(0;1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ が存在する。

証明は省略する (例えば Ahlfors [1], 高橋 [2] を見よ)。

φ のことを、**領域 Ω の等角写像**、あるいは**領域 Ω の写像関数**と呼ぶ。

いくつか簡単な形の領域の写像関数を、1 次分数変換で具体的に求めた。

$\mathbb{C}$ の単連結領域で $\mathbb{C}$ と異なるものは、関数論的には円盤領域と同型である、ということになる。

系 8.3

$\mathbb{C}$ 内の単連結領域で $\mathbb{C}$ とは異なるものは互いに同相 (位相同型) である。

証明　Ω_1, Ω_2 が $\mathbb{C}$ とは異なる $\mathbb{C}$ の単連結領域とすると、双正則写像 $\varphi_1 \colon \Omega_1 \to D(0;1)$, $\varphi_2 \colon \Omega_2 \to D(0;1)$ が存在する。このとき $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 \colon \Omega_1 \to \Omega_2$ は双正則である。特に同相写像であるので、Ω_1 と Ω_2 は同相である。 □

4.3 Riemann の写像定理　正規化条件

単連結領域 $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ が与えられたとき、Ω の写像関数は一意的には定まらない。定めるためには追加の条件が必要だが、次のものが有名である。

単連結領域 $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ が与えられたとき、Ω の写像関数は一意的には定まらない。定めるためには追加の条件が必要だが、次のものが有名である。

命題 8.4 (写像関数の決定)

Ω は $\mathbb{C}$ の単連結領域で、$\Omega \neq \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ とする。このとき、双正則写像 $\varphi\colon \Omega \to D(0;1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ で

$$\varphi(z_0) = 0, \quad \varphi'(z_0) > 0 \tag{6}$$

を満たすものは一意的である。

(6) を**正規化条件**と呼ぶ。

証明は、円盤に帰着して、1 次分数変換の議論をする (レポート課題にする)。

4.4 Jordan 領域の写像関数　Jordan 曲線定理

平面内の単連結領域の重要な例として、以下に紹介する Jordan 領域がある。Jordan 領域の写像関数はポテンシャル問題を解いて求まる (すぐ後)。

4.4 Jordan 領域の写像関数　Jordan 曲線定理

平面内の単連結領域の重要な例として、以下に紹介する Jordan 領域がある。Jordan 領域の写像関数はポテンシャル問題を解いて求まる (すぐ後)。

定理 8.5 (Jordan 曲線定理)

平面内の任意の単純閉曲線 C に対して、ある領域 U_1, U_2 が存在して、U_1 は有界、U_2 は非有界、さらに

$$\mathbb{C} = U_1 \cup C^* \cup U_2, \quad U_1 \cap U_2 = \emptyset, \quad U_1 \cap C^* = \emptyset, \quad U_2 \cap C^* = \emptyset.$$

ただし、C^* は C の像とする。さらに C^* は U_1, U_2 の共通の境界である。

(単純とは、自分自身と交わらないことを意味する。)

単純閉曲線のことを **Jordan 曲線**とも呼ぶ。Jordan 曲線 C に対して、定理で存在を保証される U_1 を、*C の囲む* **Jordan 領域**と呼ぶ。

定理 8.5 は直観的に納得しやすいが、証明はなかなか面倒ということで有名である。ここでは省略する。

Jordan 領域 Ω と $z_0 \in \Omega$ に対して、正規化条件 $\varphi(z_0) = 0$, $\varphi'(z_0) > 0$ を満たす写像関数 $\varphi\colon \Omega \to D(0;1)$ は、次の定理に基づき求められる。

4.4 Jordan 領域の写像関数　ポテンシャル問題への帰着

Jordan 領域 Ω と $z_0 \in \Omega$ に対して、正規化条件 $\varphi(z_0) = 0$, $\varphi'(z_0) > 0$ を満たす写像関数 $\varphi\colon \Omega \to D(0;1)$ は、次の定理に基づき求められる。

定理 8.6 (Jordan 領域の写像関数)

Ω を $\mathbb{C}$ 内の Jordan 領域、$z_0 \in \Omega$ とする。u を、Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題

$$\triangle u = 0 \quad (\text{in } \Omega) \tag{7}$$

$$u(x,y) = -\log|z - z_0| \quad (z = x + iy \in \partial\Omega). \tag{8}$$

の解、v を u の共役調和関数で $v(z_0) = 0$ を満たすものとするとき

$$\varphi(z) := (z - z_0)\exp\left(u(z) + iv(z)\right)$$

は、Ω の写像関数であり、正規化条件を満たす。

4.4 Jordan 領域の写像関数　ポテンシャル問題への帰着

Jordan 領域 Ω と $z_0 \in \Omega$ に対して、正規化条件 $\varphi(z_0) = 0$, $\varphi'(z_0) > 0$ を満たす写像関数 $\varphi\colon \Omega \to D(0;1)$ は、次の定理に基づき求められる。

定理 8.6 (Jordan 領域の写像関数)

Ω を $\mathbb{C}$ 内の Jordan 領域、$z_0 \in \Omega$ とする。u を、Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題

$$\triangle u = 0 \quad (\text{in } \Omega) \tag{7}$$

$$u(x,y) = -\log|z - z_0| \quad (z = x + iy \in \partial\Omega). \tag{8}$$

の解、v を u の共役調和関数で $v(z_0) = 0$ を満たすものとするとき

$$\varphi(z) := (z - z_0)\exp\left(u(z) + iv(z)\right)$$

は、Ω の写像関数であり、正規化条件を満たす。

v の求め方: 任意の $z \in \Omega$ に対し、z_0 を始点, z を終点とする Ω 内の曲線 C_z を取って

$$v(z) := \int_{C_z} (-u_y\, dx + u_x\, dy) \quad (\Omega \text{ は単連結ゆえ確定する}).$$

駆け足の証明　後述の Carathéodory の定理により、φ を $\overline{\Omega}$ から $\overline{D}(0;1)$ への同相写像に拡張する。

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)-\varphi(z_0)}{z-z_0}=\varphi'(z_0)$$

であるから、z_0 は $\dfrac{\varphi(z)}{z-z_0}$ の除去可能特異点である。以下 $\dfrac{\varphi(z)}{z-z_0}$ を Ω で正則に拡張する。

φ は単射であるから $\varphi'(z_0)\neq 0$. ゆえに $\frac{\varphi(z)}{z-z_0}\neq 0$ $(z\in\Omega)$.

Ω は単連結であるから、$\log\frac{\varphi(z)}{z-z_0}$ の Ω で一価正則な分枝が定まる。

駆け足の証明　後述の Carathéodory の定理により、φ を $\overline{\Omega}$ から $\overline{D}(0;1)$ への同相写像に拡張する。

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)-\varphi(z_0)}{z-z_0}=\varphi'(z_0)$$

であるから、z_0 は $\dfrac{\varphi(z)}{z-z_0}$ の除去可能特異点である。以下 $\dfrac{\varphi(z)}{z-z_0}$ を Ω で正則に拡張する。

φ は単射であるから $\varphi'(z_0)\neq 0$. ゆえに $\frac{\varphi(z)}{z-z_0}\neq 0$ $(z\in\Omega)$.

Ω は単連結であるから、$\log\frac{\varphi(z)}{z-z_0}$ の Ω で一価正則な分枝が定まる。その実部、虚部を u, v とする。

$$\log\frac{\varphi(z)}{z-z_0}=u(z)+iv(z). \tag{9}$$

u は調和関数であり、v は u の共役調和関数である。

4.4 Jordan 領域の写像関数　ポテンシャル問題への帰着

駆け足の証明　後述の Carathéodory の定理により、φ を $\overline{\Omega}$ から $\overline{D}(0;1)$ への同相写像に拡張する。

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)-\varphi(z_0)}{z-z_0}=\varphi'(z_0)$$

であるから、z_0 は $\dfrac{\varphi(z)}{z-z_0}$ の除去可能特異点である。以下 $\dfrac{\varphi(z)}{z-z_0}$ を Ω で正則に拡張する。

φ は単射であるから $\varphi'(z_0)\neq 0$. ゆえに $\frac{\varphi(z)}{z-z_0}\neq 0$ $(z\in\Omega)$.

Ω は単連結であるから、$\log\frac{\varphi(z)}{z-z_0}$ の Ω で一価正則な分枝が定まる。その実部、虚部を u, v とする。

$$\log\frac{\varphi(z)}{z-z_0}=u(z)+iv(z). \tag{9}$$

u は調和関数であり、v は u の共役調和関数である。

$z\in\partial\Omega$ のとき $|\varphi(z)|=1$ であるから

$$u(z)=\log\left|\frac{\varphi(z)}{z-z_0}\right|=-\log|z-z_0|\quad(z\in\partial\Omega).$$

ゆえに u は、次の Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題の解として確定する。

$$\triangle u = 0 \quad (\text{in } \Omega) \tag{10}$$

$$u(z) = -\log|z - z_0| \quad (z \in \Omega). \tag{11}$$

v は u の共役調和関数であることから、定数差を除き定まる。例えば、z_0 を始点、$z \in \Omega$ を終点とする Ω 内の曲線 C_z を取って

$$v(z) := \int_{C_z} (v_x\, dx + v_y\, dy) = \int_{C_z} (-u_y\, dx + u_x\, dy)$$

とすればよい (Ω は単連結であるから、v の値は確定する)。

(9) から

$$\varphi(z) = (z - z_0)\exp(u(z) + iv(z))$$

であるから $\varphi(z_0) = 0$.

ゆえに u は、次の Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題の解として確定する。

$$\triangle u = 0 \quad (\text{in } \Omega) \tag{10}$$

$$u(z) = -\log|z - z_0| \quad (z \in \Omega). \tag{11}$$

v は u の共役調和関数であることから、定数差を除き定まる。例えば、z_0 を始点、$z \in \Omega$ を終点とする Ω 内の曲線 C_z を取って

$$v(z) := \int_{C_z} (v_x\, dx + v_y\, dy) = \int_{C_z} (-u_y\, dx + u_x\, dy)$$

とすればよい (Ω は単連結であるから、v の値は確定する)。

(9) から

$$\varphi(z) = (z - z_0)\exp(u(z) + iv(z))$$

であるから $\varphi(z_0) = 0$. また

$$\varphi'(z) = \exp(u(z) + iv(x)) + (z - z_0)(u'(z) + iv'(z))\exp\left(u(z) + iv(z)\right),$$
$$\varphi'(z_0) = \exp(u(z_0) + iv(z_0)).$$

ゆえに u は、次の Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題の解として確定する。

(10) $$\triangle u = 0 \quad (\text{in } \Omega)$$

(11) $$u(z) = -\log|z - z_0| \quad (z \in \Omega).$$

v は u の共役調和関数であることから、定数差を除き定まる。例えば、z_0 を始点、$z \in \Omega$ を終点とする Ω 内の曲線 C_z を取って

$$v(z) := \int_{C_z} (v_x\,dx + v_y\,dy) = \int_{C_z} (-u_y\,dx + u_x\,dy)$$

とすればよい (Ω は単連結であるから、v の値は確定する)。

(9) から

$$\varphi(z) = (z - z_0)\exp(u(z) + iv(z))$$

であるから $\varphi(z_0) = 0$. また

$$\varphi'(z) = \exp(u(z) + iv(x)) + (z - z_0)(u'(z) + iv'(z))\exp\left(u(z) + iv(z)\right),$$
$$\varphi'(z_0) = \exp(u(z_0) + iv(z_0)).$$

これから、$\varphi'(z_0) > 0 \Leftrightarrow v(z_0) \equiv 0 \pmod{2\pi}$ が分かる。ゆえに $(\exists k \in \mathbb{Z})$ $v(z_0) = 2k\pi$ であるが、どの k を選んでも φ は変わらないので、$v(z_0) = 0$ で v を定めれば良い。

定理 8.7 (Carathéodory の定理)

C を $\mathbb{C}$ 内の Jordan 曲線、Ω を C の囲む Jordan 領域、$\varphi\colon \Omega \to D(0;1)$ を双正則とするとき、φ は同相写像 $\widetilde{\varphi}\colon \overline{\Omega} \to \overline{D}(0;1)$ に拡張できる。

私自身はチェックしていないが、Wikipedia ▸ Link に証明の情報がある (手持ちのテキストで載っているものを探したのだけれど…有名な Ahlfors [1] も give up している)。

Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題

$$\triangle u = 0 \quad (\text{in } \Omega), \tag{12a}$$

$$u = g \quad (\text{on } \partial\Omega) \tag{12b}$$

の解 u の存在を示すため、Riemann は次のように考えた。

4.5 Dirichlet の原理

Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題

$$\triangle u = 0 \quad (\text{in } \Omega), \tag{12a}$$

$$u = g \quad (\text{on } \partial\Omega) \tag{12b}$$

の解 u の存在を示すため、Riemann は次のように考えた。

境界条件 (12b) を満たす関数の全体 X と、X 上の汎関数 J を考える。

$$X := \left\{u \;\middle|\; u\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R},\ (\forall x \in \partial\Omega)\ u(x) = g(x)\right\}.$$

$$J[u] := \iint_\Omega \left(u_x^2 + u_y^2\right) dx\, dy \quad (u \in X).$$

Dirichlet の原理

J の最小値を与える u は $\triangle u = 0$ (in Ω) を満たす。

Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題

$$\triangle u = 0 \quad (\text{in } \Omega), \tag{12a}$$

$$u = g \quad (\text{on } \partial\Omega) \tag{12b}$$

の解 u の存在を示すため、Riemann は次のように考えた。

境界条件 (12b) を満たす関数の全体 X と、X 上の汎関数 J を考える。

$$X := \left\{ u \;\middle|\; u\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R},\ (\forall x \in \partial\Omega)\ u(x) = g(x) \right\}.$$

$$J[u] := \iint_{\Omega} \left(u_x^2 + u_y^2 \right) dx\, dy \quad (u \in X).$$

Dirichlet の原理

J の最小値を与える u は $\triangle u = 0$ (in Ω) を満たす。

したがって J の最小値を与える u は (12a), (12b) の解である。

Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題

$$\triangle u = 0 \quad (\text{in } \Omega), \tag{12a}$$

$$u = g \quad (\text{on } \partial\Omega) \tag{12b}$$

の解 u の存在を示すため、Riemann は次のように考えた。
境界条件 (12b) を満たす関数の全体 X と、X 上の汎関数 J を考える。

$$X := \left\{ u \mid u\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R},\ (\forall x \in \partial\Omega)\ u(x) = g(x) \right\}.$$

$$J[u] := \iint_\Omega \left(u_x^2 + u_y^2\right) dx\, dy \quad (u \in X).$$

Dirichlet の原理

J の最小値を与える u は $\triangle u = 0$ (in Ω) を満たす。

したがって J の最小値を与える u は (12a), (12b) の解である。
Riemann (1826–1866) は、Dirichlet (1805–1859) 先生の講義の中で Dirichlet の原理を聴いたそうである。

証明　$v\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ は、$v = 0$ (on $\partial\Omega$) を満たす任意の関数とする。任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $u + tv \in X$ である。仮定より

$$f(t) := J[u + tv] \quad (t \in \mathbb{R})$$

は $t = 0$ で最小値をとる。

証明　$v\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ は、$v = 0$ (on $\partial\Omega$) を満たす任意の関数とする。任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $u + tv \in X$ である。仮定より

$$f(t) := J[u + tv] \quad (t \in \mathbb{R})$$

は $t = 0$ で最小値をとる。ところが

$$f(t) = J[u] + 2t \iint_\Omega (u_x v_x + u_y v_y) dx\, dy + t^2 \iint_\Omega \left(v_x^2 + v_y^2\right) dx\, dy$$

は t の 2 次関数であり、$t = 0$ で最小となるので、1 次の係数は 0 である:

(13)
$$\iint_\Omega (u_x v_x + u_y v_y)\, dx\, dy = 0.$$

4.5 Dirichlet の原理

証明　$v\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ は、$v = 0$ (on $\partial\Omega$) を満たす任意の関数とする。任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $u + tv \in X$ である。仮定より

$$f(t) := J[u + tv] \quad (t \in \mathbb{R})$$

は $t = 0$ で最小値をとる。ところが

$$f(t) = J[u] + 2t \iint_\Omega (u_x v_x + u_y v_y) dx\, dy + t^2 \iint_\Omega \left(v_x^2 + v_y^2\right) dx\, dy$$

は t の 2 次関数であり、$t = 0$ で最小となるので、1 次の係数は 0 である:

$$\iint_\Omega (u_x v_x + u_y v_y)\, dx\, dy = 0. \tag{13}$$

Green の公式 $\left(\iint_\Omega \triangle u v\; dx\, dy = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v\; d\sigma - \iint_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\; dx\, dy\right)$ より

$$\iint_\Omega \triangle u\, v\; dx\, dy = 0.$$

証明 $v \colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ は、$v = 0$ (on $\partial\Omega$) を満たす任意の関数とする。任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $u + tv \in X$ である。仮定より

$$f(t) := J[u + tv] \quad (t \in \mathbb{R})$$

は $t = 0$ で最小値をとる。ところが

$$f(t) = J[u] + 2t \iint_\Omega (u_x v_x + u_y v_y) dx\, dy + t^2 \iint_\Omega \left(v_x^2 + v_y^2\right) dx\, dy$$

は t の 2 次関数であり、$t = 0$ で最小となるので、1 次の係数は 0 である:

$$\iint_\Omega (u_x v_x + u_y v_y)\, dx\, dy = 0. \tag{13}$$

Green の公式 $\left(\iint_\Omega \triangle u v\ dx\, dy = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v\ d\sigma - \iint_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\ dx\, dy\right)$ より

$$\iint_\Omega \triangle u\, v\ dx\, dy = 0.$$

これが任意の v について成り立つことから (**変分法の基本補題により**)

$$\triangle u = 0 \quad (\text{in } \Omega). \quad \square$$

4.5 Dirichlet の原理
反省

Riemann は、汎関数 $J[u]$ を最小にする $u \in X$ の存在は明らかだと考えた。

J は下に有界 ($J[u] \geq 0$) であるから、J は下限を持つ。それは最小値のはず…

Riemann は、汎関数 $J[u]$ を最小にする $u \in X$ の存在は明らかだと考えた。

J は下に有界 $(J[u] \geq 0)$ であるから、J は下限を持つ。それは最小値のはず…

それに Weierstrass が疑義を呈した (「下限は本当に最小値？」とツッコミを入れた)。これに Riemann は存命中に答えられなかった。

Riemann は、汎関数 $J[u]$ を最小にする $u \in X$ の存在は明らかだと考えた。

J は下に有界 $(J[u] \geq 0)$ であるから、J は下限を持つ。それは最小値のはず…

それに Weierstrass が疑義を呈した (「下限は本当に最小値？」とツッコミを入れた)。これに Riemann は存命中に答えられなかった。

現代的な解説をすると、関数空間は無限次元空間なので、有界閉集合上の連続関数であっても、最小値を持たないことがありえる。

Riemann は、汎関数 $J[u]$ を最小にする $u \in X$ の存在は明らかだと考えた。

J は下に有界 $(J[u] \geq 0)$ であるから、J は下限を持つ。それは最小値のはず…

それに Weierstrass が疑義を呈した (「下限は本当に最小値？」とツッコミを入れた)。これに Riemann は存命中に答えられなかった。

現代的な解説をすると、関数空間は無限次元空間なので、有界閉集合上の連続関数であっても、最小値を持たないことがありえる。

ポテンシャル問題は重要なため、解の存在について、多くの人が努力して Dirichlet 原理を用いない証明がいくつか発見されたが、Riemann の発表から約 50 年後 (1900 年頃)、D. Hilbert が Dirichlet 原理に基づく証明を発表し、肯定的に解決した。

4.5 Dirichlet の原理

反省

Riemann は、汎関数 $J[u]$ を最小にする $u \in X$ の存在は明らかだと考えた。

J は下に有界 ($J[u] \geq 0$) であるから、J は下限を持つ。それは最小値のはず⋯

それに Weierstrass が疑義を呈した (「下限は本当に最小値？」とツッコミを入れた)。これに Riemann は存命中に答えられなかった。

現代的な解説をすると、関数空間は無限次元空間なので、有界閉集合上の連続関数であっても、最小値を持たないことがありえる。

ポテンシャル問題は重要なため、解の存在について、多くの人が努力して Dirichlet 原理を用いない証明がいくつか発見されたが、Riemann の発表から約 50 年後 (1900 年頃)、D. Hilbert が Dirichlet 原理に基づく証明を発表し、肯定的に解決した。

今では解の存在証明は、このルートをたどるのがスタンダードになっている。⋯でも応用複素関数としては、ここから数値計算法に舵を切る (存在証明については、関数解析か偏微分方程式論で学んでください)。

4.6 ポテンシャル問題の数値解法 (1) 有限要素法

ポテンシャル問題を数値的に解くことを考えよう。この「応用複素関数」では、**有限要素法**と**基本解の方法**を簡単に紹介する。

4.6 ポテンシャル問題の数値解法 (1) 有限要素法

ポテンシャル問題を数値的に解くことを考えよう。この「応用複素関数」では、**有限要素法**と**基本解の方法**を簡単に紹介する。

差分法で解くこともできるが、長方形領域でない問題を解くには工夫が必要になり、あまり便利でない。

4.6 ポテンシャル問題の数値解法 (1) 有限要素法

ポテンシャル問題を数値的に解くことを考えよう。この「応用複素関数」では、**有限要素法**と**基本解の方法**を簡単に紹介する。

差分法で解くこともできるが、長方形領域でない問題を解くには工夫が必要になり、あまり便利でない。

有限要素法の主たるアイディアは次の 2 つ:

1. **弱形式**を用いる。
2. 領域を三角形、四面体などの**有限要素**に分割し、近似解や試験関数に**区分的多項式**を採用する。

4.6 ポテンシャル問題の数値解法 (1) 有限要素法

ポテンシャル問題を数値的に解くことを考えよう。この「応用複素関数」では、**有限要素法**と**基本解の方法**を簡単に紹介する。

差分法で解くこともできるが、長方形領域でない問題を解くには工夫が必要になり、あまり便利でない。

有限要素法の主たるアイディアは次の 2 つ:

1. **弱形式**を用いる。
2. 領域を三角形、四面体などの**有限要素**に分割し、近似解や試験関数に**区分的多項式**を採用する。

この講義では有限要素法の詳細は解説できないが、幸い **FreeFem++** というソフトを用いると、弱形式さえ分かれば、有限要素についてはソフトに任せにして、数値計算ができる。

4.6 ポテンシャル問題の数値解法 (1) 有限要素法

ポテンシャル問題を数値的に解くことを考えよう。この「応用複素関数」では、**有限要素法**と**基本解の方法**を簡単に紹介する。

差分法で解くこともできるが、長方形領域でない問題を解くには工夫が必要になり、あまり便利でない。

有限要素法の主たるアイディアは次の 2 つ:

1. **弱形式**を用いる。
2. 領域を三角形、四面体などの**有限要素**に分割し、近似解や試験関数に**区分的多項式**を採用する。

この講義では有限要素法の詳細は解説できないが、幸い **FreeFem++** というソフトを用いると、弱形式さえ分かれば、有限要素についてはソフトに任せにして、数値計算ができる。

実は Dirichlet 原理の証明中に現れた (13) は Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題の弱形式である。(弱形式については、次回解説を行う。)

今回は「百聞は一見にしかず」で、まずはプログラム (スライド 1 枚) を紹介する。
2,3 行書き換えるだけで「自分の問題」が解ける。

```
// potential2d-v0.edp ---  2 次元非圧縮ポテンシャル流
//  速度ポテンシャル, 速度を求め、等ポテンシャル線, 速度場を描く
border Gamma(t=0,2*pi) { x = cos(t); y = sin(t); } // 円盤領域
int m=40;
mesh Th=buildmesh(Gamma(m));
plot(Th, wait=1, ps="Th.eps");
// 次の 2 行は区分 1 次多項式を使うという意味
fespace Vh(Th,P1);
Vh phi, v, v1, v2;
// 境界条件の設定
func Vn=x+2*y; // Ωが単位円で, V=(1,2) のとき V・n=x+2y

// 速度ポテンシャルφを求め、その等高線 (等ポテンシャル線) を描く
solve Laplace(phi,v) =
  int2d(Th)(dx(phi)*dx(v)+dy(phi)*dy(v)) -int1d(Th,Gamma)(Vn*v);
plot(phi,ps="contourpotential.eps",wait=1);
// ベクトル場 (v1,v2)=∇φ を描く (ちょっと雑なやり方)
v1=dx(phi); v2=dy(phi);
plot([v1,v2],ps="vectorfield.eps",wait=1);

// 等ポテンシャル線とベクトル場を同時に描く
plot([v1,v2],phi,ps="both.eps", wait=1);
```

1. **FreeFem++ の WWW サイト** Link
   分厚い事例集 (マニュアル?) Hecht [3] がある。
2. `FreeFem++-4.9-full-MacOS_10.11.pkg` Link
   (フランスは遠いので、2021/6/7 での最新版を中野キャンパスにあるホストに置いておきます。)
3. 「Mac での FreeFEM のインストール作業メモ」v. 4.0 の場合 Link
   (最新版ではないですが大体同じです。)
4. 「有限要素法と FreeFem++」 Link
   (FreeFem++ の簡単な紹介と 2 つのサンプルプログラムの紹介)
5. 「FreeFem++ の紹介」 Link
   (ずっと以前に書いた紹介文。もう役目は終えたような気がする。)

1. **FreeFem++ の WWW サイト** ▸ Link
   分厚い事例集 (マニュアル?) Hecht [3] がある。
2. `FreeFem++-4.9-full-MacOS_10.11.pkg` ▸ Link
   (フランスは遠いので、2021/6/7 での最新版を中野キャンパスにあるホストに置いておきます。)
3. 「Mac での FreeFEM のインストール作業メモ」v. 4.0 の場合 ▸ Link
   (最新版ではないですが大体同じです。)
4. 「有限要素法と FreeFem++」 ▸ Link
   (FreeFem++ の簡単な紹介と 2 つのサンプルプログラムの紹介)
5. 「FreeFem++ の紹介」 ▸ Link
   (ずっと以前に書いた紹介文。もう役目は終えたような気がする。)

とりあえず本家 (1) にご挨拶して、ソフトの入手は (1) でも良いですが、(2) にしたらいかがでしょう。

1. **FreeFem++ の WWW サイト** Link
   分厚い事例集 (マニュアル?) Hecht [3] がある。
2. `FreeFem++-4.9-full-MacOS_10.11.pkg` Link
   (フランスは遠いので、2021/6/7 での最新版を中野キャンパスにあるホストに置いておきます。)
3. 「Mac での FreeFEM のインストール作業メモ」v. 4.0 の場合 Link
   (最新版ではないですが大体同じです。)
4. 「有限要素法と FreeFem++」 Link
   (FreeFem++ の簡単な紹介と 2 つのサンプルプログラムの紹介)
5. 「FreeFem++ の紹介」 Link
   (ずっと以前に書いた紹介文。もう役目は終えたような気がする。)

とりあえず本家 (1) にご挨拶して、ソフトの入手は (1) でも良いですが、(2) にしたらいかがでしょう。インストール作業は動画を見てもらっても良いですが、(3) も参考になるかもしれません。

1. **FreeFem++ の WWW サイト** ▸ Link
   分厚い事例集 (マニュアル?) Hecht [3] がある。
2. `FreeFem++-4.9-full-MacOS_10.11.pkg` ▸ Link
   (フランスは遠いので、2021/6/7 での最新版を中野キャンパスにあるホストに置いておきます。)
3. 「Mac での FreeFEM のインストール作業メモ」v. 4.0 の場合 ▸ Link
   (最新版ではないですが大体同じです。)
4. 「有限要素法と FreeFem++」 ▸ Link
   (FreeFem++ の簡単な紹介と 2 つのサンプルプログラムの紹介)
5. 「FreeFem++ の紹介」 ▸ Link
   (ずっと以前に書いた紹介文。もう役目は終えたような気がする。)

とりあえず本家 (1) にご挨拶して、ソフトの入手は (1) でも良いですが、(2) にしたらいかがでしょう。インストール作業は動画を見てもらっても良いですが、(3) も参考になるかもしれません。FreeFem++ については、唯一の和書である大塚・高石 [4] 以外にも、最近は、WWW 上でも日本語の解説が増えて来て、多くは信頼できます (ノイズが少ない)。手短な説明として (4) を用意しておきます。

FreeFem++ を体験しよう　サンプル・プログラム

FreeFem++ がインストールできたら、ターミナルを開いて以下の 4 つのコマンドを順番に実行して下さい。

```
curl -O http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/potential2d-v0.edp
FreeFem++ potential2d-v0.edp

curl -O http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/program/freefem/poisson.edp
FreeFem++ poisson.edp
```

FreeFem++ では、`plot()` 実行後に一時停止することがあります (グラフィックスを見てもらうため)。次のプロットへ進むには [Enter]、グラフィックスを閉じるには [esc] を入力します。

FreeFem++ のインストールや、サンプル・プログラムの実行については、気軽に質問して下さい。前者は使用する Mac で Zoom 質問ミーティングに参加して (空いています)、画面共有で状況を見せてくれるとスムーズに相談できると思います。

参考文献

[1] Ahlfors, K.: *Complex Analysis*, McGraw Hill (1953), 笠原 乾吉 訳, 複素解析, 現代数学社 (1982).

[2] 高橋礼司：複素解析, 東京大学出版会 (1990), 最初、筑摩書房から 1979 年に出版された．丸善 eBook では、https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000049441 でアクセスできる．

[3] Hecht, F.: Freefem++, https://doc.freefem.org/pdf/FreeFEM-documentation.pdf, 以前は http://www3.freefem.org/ff++/ftp/freefem++doc.pdf にあった。

[4] 大塚厚二, 高石武史：有限要素法で学ぶ現象と数理 — FreeFem++数理思考プログラミング —, 共立出版 (2014), http://comfos.org/jp/ffempp/book/ というサポート WWW サイトがある。