応用複素関数 第 7 回

～ 流体力学への応用 (3) ～

かつらだ まさし
桂田 祐史

2021 年 6 月 1 日

目次

本日の内容・連絡事項

- 前回は

  定常 2 次元非圧縮ポテンシャル流が正則関数である

  ことを説明した (定常とは、速度 $\boldsymbol{v}$, 圧力 p が時間変化しないこと)。
  今回、簡単な正則関数に対応する流れ、それらの重ね合せを調べる。
  　流体に関わらない複素関数の話としても重要である。

本日の内容・連絡事項

- 前回は

  定常 2 次元非圧縮ポテンシャル流が正則関数である

  ことを説明した (定常とは、速度 $\boldsymbol{v}$, 圧力 p が時間変化しないこと)。
  今回、簡単な正則関数に対応する流れ、それらの重ね合せを調べる。
  　流体に関わらない複素関数の話としても重要である。
- 関数論と流体力学についての資料 (PDF にはリンクを張ってある)
  - 「複素関数と流体力学」桂田 [1]
    講義ノートのようなもの。
  - 「ベクトル解析早見表」
    定義式や定理。(詳しめの説明は桂田 [2] がある。)

  参考書としては、今井「複素解析と流体力学」 [3] をあげておく。

本日の内容・連絡事項

- 前回は

  定常 2 次元非圧縮ポテンシャル流が正則関数である

  ことを説明した (定常とは、速度 $\boldsymbol{v}$, 圧力 p が時間変化しないこと)。
  今回、簡単な正則関数に対応する流れ、それらの重ね合せを調べる。
  流体に関わらない複素関数の話としても重要である。
- 関数論と流体力学についての資料 (PDF にはリンクを張ってある)
  - 「複素関数と流体力学」桂田 [1]
    講義ノートのようなもの。
  - 「ベクトル解析早見表」
    定義式や定理。(詳しめの説明は桂田 [2] がある。)

  参考書としては、今井「複素解析と流体力学」 [3] をあげておく。
- レポート課題 1 を出します。締め切りは 7 月 5 日 (23:00)。提出は Oh-o! Meiji を用いる。課題文や注意事項などは次を見ること。

  `http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/report1/`

  (教育実習の人は注意して下さい。)

複素関数の可視化 (流体の話を離れて)

複素関数の可視化 (流体の話を離れて)

複素関数 f の実部・虚部をそれぞれ u, v として、それらが微分可能なとき、f が正則であるためには

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

という Cauchy-Riemann 方程式を満たすことが必要十分である、という定理があった。

複素関数の可視化 (流体の話を離れて)

　複素関数 f の実部・虚部をそれぞれ u, v として、それらが微分可能なとき、f が正則であるためには

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

という Cauchy-Riemann 方程式を満たすことが必要十分である、という定理があった。

　ゆえに任意の正則関数 f について

$$\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v = u_x v_x + u_y v_y = u_x(-u_y) + u_y u_x = 0$$

であるから、**実部 u, 虚部 v の等高線は互いに直交している**。
(復習: $\operatorname{grad} \phi$ は ϕ の等高線 ($\phi(x, y) = c$) の法線ベクトルである。)

複素関数の可視化 (流体の話を離れて)

複素関数 f の実部・虚部をそれぞれ u, v として、それらが微分可能なとき、f が正則であるためには

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

という Cauchy-Riemann 方程式を満たすことが必要十分である、という定理があった。

ゆえに任意の正則関数 f について

$$\mathrm{grad}\, u \cdot \mathrm{grad}\, v = u_x v_x + u_y v_y = u_x(-u_y) + u_y u_x = 0$$

であるから、**実部 u, 虚部 v の等高線は互いに直交している**。
(復習: $\mathrm{grad}\,\phi$ は ϕ の等高線 ($\phi(x,y)=c$) の法線ベクトルである。)

複素関数の有名なテキストである Ahlfors [4] では、初等関数の実部・虚部の等高線がどうなっているか、紙数を惜しまずに説明してある。

複素関数の可視化 (流体の話を離れて)

複素関数 f の実部・虚部をそれぞれ u, v として、それらが微分可能なとき、f が正則であるためには

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

という Cauchy-Riemann 方程式を満たすことが必要十分である、という定理があった。

ゆえに任意の正則関数 f について

$$\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v = u_x v_x + u_y v_y = u_x(-u_y) + u_y u_x = 0$$

であるから、**実部 u, 虚部 v の等高線は互いに直交している。**
(復習: $\operatorname{grad} \phi$ は ϕ の等高線 ($\phi(x, y) = c$) の法線ベクトルである。)

複素関数の有名なテキストである Ahlfors [4] では、初等関数の実部・虚部の等高線がどうなっているか、紙数を惜しまずに説明してある。

(小さな文字で流体の話に戻すと　等ポテンシャル線と流線は直交する、ということ。)

1 次関数 $f(z) = cz$, $c = p - iq$ (ただし $p, q \in \mathbb{R}$) のとき、

1 次関数 $f(z) = cz$, $c = p - iq$ (ただし $p, q \in \mathbb{R}$) のとき、

$$f(x + yi) = (p - iq)(x + yi) = px + qy + i(-qx + py),$$
$$u - iv = f' = c = p - iq.$$

1 次関数 $f(z) = cz$, $c = p - iq$ (ただし $p, q \in \mathbb{R}$) のとき、

$$f(x + yi) = (p - iq)(x + yi) = px + qy + i(-qx + py),$$
$$u - iv = f' = c = p - iq.$$

復習: 正則関数 f の定める速度場の成分を u, v とすると、$f' = u - iv$.

1 次関数 $f(z) = cz$, $c = p - iq$ (ただし $p, q \in \mathbb{R}$) のとき、

$$f(x + yi) = (p - iq)(x + yi) = px + qy + i(-qx + py),$$
$$u - iv = f' = c = p - iq.$$

復習: 正則関数 f の定める速度場の成分を u, v とすると、$f' = u - iv$.

ゆえに f を複素速度ポテンシャルとする流れの速度場は

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

これは定数である。そのため (場所によらないため) **一様流**と呼ばれる。

1 次関数は一様流の速度ポテンシャルである。

1 次関数 $f(z)=cz$, $c=p-iq$ (ただし $p,q\in\mathbb{R}$) のとき、

$$f(x+yi)=(p-iq)(x+yi)=px+qy+i(-qx+py),$$
$$u-iv=f'=c=p-iq.$$

復習: 正則関数 f の定める速度場の成分を u, v とすると、$f'=u-iv$.

ゆえに f を複素速度ポテンシャルとする流れの速度場は

$$\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}.$$

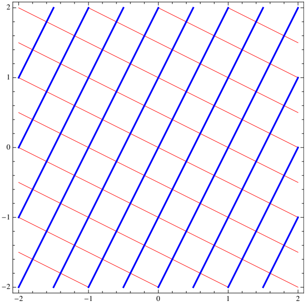
これは定数である。そのため (場所によらないため) **一様流**と呼ばれる。

1 次関数は一様流の速度ポテンシャルである。

このとき、速度ポテンシャルと流れ関数は

$$\phi(x,y)=\operatorname{Re}f(x+iy)=px+qy,\quad \psi(x,y)=\operatorname{Im}f(x+iy)=-qx+py.$$

等ポテンシャル線 ($\phi = \mathrm{const.}$) も、流線 ($\psi = \mathrm{const.}$) も平行直線群であり、それらは互いに直交する。



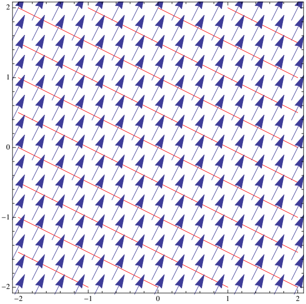


図 1: 一様流の等ポテンシャル線 (赤)、流線 (青) と速度ベクトル

3.13.2 湧き出しと吸い込み

$m \in \mathbb{R}$, $f(z) = m \log z$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$.

3.13.2 湧き出しと吸い込み

$m \in \mathbb{R}$, $f(z) = m \log z$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$. この f は多価関数なので、少し気持ちが悪いが、分枝は定数差しかないので、微分すると一価である。

3.13.2 湧き出しと吸い込み

$m \in \mathbb{R}$, $f(z) = m \log z$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$. この f は多価関数なので、少し気持ちが悪いが、分枝は定数差しかないので、微分すると一価である。

$z = re^{i\theta}$ $(r \geq 0,\ \theta \in \mathbb{R})$ とすると

$$f\left(re^{i\theta}\right) = m\left(\log r + i\theta\right) = m \log r + im\theta,$$

$$u - iv = f'(z) = \frac{m}{z} = \frac{m}{re^{i\theta}} = \frac{m}{r}\left(\cos\theta - i\sin\theta\right).$$

3.13.2 湧き出しと吸い込み

$m \in \mathbb{R}$, $f(z) = m \log z$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$. この f は多価関数なので、少し気持ちが悪いが、分枝は定数差しかないので、微分すると一価である。

$z = re^{i\theta}$ $(r \geq 0,\ \theta \in \mathbb{R})$ とすると

$$f\left(re^{i\theta}\right) = m\left(\log r + i\theta\right) = m \log r + im\theta,$$

$$u - iv = f'(z) = \frac{m}{z} = \frac{m}{re^{i\theta}} = \frac{m}{r}\left(\cos\theta - i\sin\theta\right).$$

ゆえに f を複素速度ポテンシャルとする流れの速度場は

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m}{r}\cos\theta \\ \frac{m}{r}\sin\theta \end{pmatrix}.$$

3.13.2 湧き出しと吸い込み

$m \in \mathbb{R}$, $f(z) = m \log z$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$. この f は多価関数なので、少し気持ちが悪いが、分枝は定数差しかないので、微分すると一価である。

$z = re^{i\theta}$ $(r \geq 0,\ \theta \in \mathbb{R})$ とすると

$$f\left(re^{i\theta}\right) = m\left(\log r + i\theta\right) = m \log r + im\theta,$$

$$u - iv = f'(z) = \frac{m}{z} = \frac{m}{re^{i\theta}} = \frac{m}{r}\left(\cos\theta - i\sin\theta\right).$$

ゆえに f を複素速度ポテンシャルとする流れの速度場は

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m}{r}\cos\theta \\ \frac{m}{r}\sin\theta \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{v}$ の方向は、$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$ と同じ。$m > 0$ ならば向きも同じ (湧き出し)、$m < 0$ ならば向きは逆 (吸い込み)。

$\boldsymbol{v}$ の大きさ $|\boldsymbol{v}|$ は $\frac{|m|}{r}$ で、原点からの距離に反比例している。

3.13.2 湧き出しと吸い込み

$m \in \mathbb{R}$, $f(z) = m \log z$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$. この f は多価関数なので、少し気持ちが悪いが、分枝は定数差しかないので、微分すると一価である。

$z = re^{i\theta}$ $(r \geq 0,\ \theta \in \mathbb{R})$ とすると

$$f(re^{i\theta}) = m\left(\log r + i\theta\right) = m \log r + im\theta,$$

$$u - iv = f'(z) = \frac{m}{z} = \frac{m}{re^{i\theta}} = \frac{m}{r}\left(\cos\theta - i\sin\theta\right).$$

ゆえに f を複素速度ポテンシャルとする流れの速度場は

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m}{r}\cos\theta \\ \frac{m}{r}\sin\theta \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{v}$ の方向は、$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$ と同じ。$m > 0$ ならば向きも同じ (湧き出し)、$m < 0$ ならば向きは逆 (吸い込み)。

$\boldsymbol{v}$ の大きさ $|\boldsymbol{v}|$ は $\frac{|m|}{r}$ で、原点からの距離に反比例している。

速度ポテンシャルと流れ関数は

$$\phi(x,y) = \operatorname{Re} f(z) = m \log r, \quad \psi(x,y) = \operatorname{Im} f(z) = m\theta.$$

3.13.2 湧き出しと吸い込み (続き)

等ポテンシャル線 ($\phi = m \log r =$ 定数) は原点を中心とする同心円群、流線 ($\psi = m\theta =$ 定数) は原点を始点とする半直線群である (もちろん互いに直交)。

3.13.2 湧き出しと吸い込み (続き)

等ポテンシャル線 ($\phi = m \log r =$ 定数) は原点を中心とする同心円群、流線 ($\psi = m\theta =$ 定数) は原点を始点とする半直線群である (もちろん互いに直交)。

原点を正の向きに一周する閉曲線 C に対し、C から外に湧き出る流量は

$$\int_C \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, ds = \mathrm{Im} \int_C f'(z)\, dz = \mathrm{Im} \int_C \frac{m}{z}\, dz = 2\pi m \quad (C \text{ によらない}).$$

等ポテンシャル線 ($\phi = m \log r =$ 定数) は原点を中心とする同心円群、流線 ($\psi = m\theta =$ 定数) は原点を始点とする半直線群である (もちろん互いに直交)。

原点を正の向きに一周する閉曲線 C に対し、C から外に湧き出る流量は

$$\int_C \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, ds = \mathrm{Im} \int_C f'(z)\, dz = \mathrm{Im} \int_C \frac{m}{z}\, dz = 2\pi m \quad (C \text{ によらない}).$$

この流れは、$m > 0$ ならば原点においた**湧き出し** (source), $m < 0$ ならば原点に置いた**吸い込み** (sink) と呼ばれる。

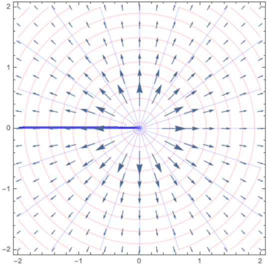


図 2: 湧き出しの等ポテンシャル線, 流線, 速度場

3.13.3 渦糸 (点渦)

$\kappa \in \mathbb{R}$, $f(z) = i\kappa \log z \ (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$.

3.13.3 渦糸 (点渦)

$\kappa \in \mathbb{R}$, $f(z) = i\kappa \log z$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$.
$z = re^{i\theta}$ $(r \geq 0,\ \theta \in \mathbb{R})$ とすると

$$f(re^{i\theta}) = i\kappa(\log r + i\theta) = -\kappa\theta + i\kappa \log r,$$

$$u - iv = f'(z) = \frac{i\kappa}{z} = \frac{i\kappa}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) = \frac{\kappa}{r}(\sin\theta + i\cos\theta).$$

3.13.3 渦糸 (点渦)

$\kappa \in \mathbb{R}$, $f(z) = i\kappa \log z$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$.
$z = re^{i\theta}$ $(r \geq 0,\ \theta \in \mathbb{R})$ とすると

$$f(re^{i\theta}) = i\kappa (\log r + i\theta) = -\kappa\theta + i\kappa \log r,$$

$$u - iv = f'(z) = \frac{i\kappa}{z} = \frac{i\kappa}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) = \frac{\kappa}{r}(\sin\theta + i\cos\theta).$$

ゆえに f を複素速度ポテンシャルとする流れの速度場は

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{\kappa}{r}\begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

3.13.3 渦糸 (点渦)

$\kappa \in \mathbb{R}$, $f(z) = i\kappa \log z$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$.
$z = re^{i\theta}$ $(r \geq 0,\ \theta \in \mathbb{R})$ とすると

$$f(re^{i\theta}) = i\kappa \left(\log r + i\theta\right) = -\kappa\theta + i\kappa \log r,$$

$$u - iv = f'(z) = \frac{i\kappa}{z} = \frac{i\kappa}{r}\left(\cos\theta - i\sin\theta\right) = \frac{\kappa}{r}\left(\sin\theta + i\cos\theta\right).$$

ゆえに f を複素速度ポテンシャルとする流れの速度場は

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{\kappa}{r}\begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{v}$ の方向は $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を $-\frac{\pi}{2}$ 回転した方向である。$\kappa > 0$ ならば向きも同じ (時計回り)、$\kappa < 0$ ならば向きは逆 (反時計回り)。
$\boldsymbol{v}$ の大きさは $\frac{|\kappa|}{r}$ で、原点からの距離に反比例する。

3.13.3 渦糸 (点渦)

$\kappa \in \mathbb{R}$, $f(z) = i\kappa \log z$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$.
$z = re^{i\theta}$ $(r \geq 0,\ \theta \in \mathbb{R})$ とすると

$$f(re^{i\theta}) = i\kappa\left(\log r + i\theta\right) = -\kappa\theta + i\kappa \log r,$$

$$u - iv = f'(z) = \frac{i\kappa}{z} = \frac{i\kappa}{r}\left(\cos\theta - i\sin\theta\right) = \frac{\kappa}{r}\left(\sin\theta + i\cos\theta\right).$$

ゆえに f を複素速度ポテンシャルとする流れの速度場は

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{\kappa}{r}\begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{v}$ の方向は $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を $-\frac{\pi}{2}$ 回転した方向である。$\kappa > 0$ ならば向きも同じ (時計回り)、$\kappa < 0$ ならば向きは逆 (反時計回り)。

$\boldsymbol{v}$ の大きさは $\frac{|\kappa|}{r}$ で、原点からの距離に反比例する。

速度ポテンシャルと流れ関数は

$$\phi(x,y) = \mathrm{Re}\, f(z) = -\kappa\theta, \quad \psi(x,y) = \mathrm{Im}\, f(z) = \kappa \log r.$$

3.13.3 渦糸 (点渦) 続き

等ポテンシャル線 ($\phi = -\kappa\theta =$ 定数) は原点を始点とする半直線で、流線 ($\psi = \kappa \log r =$ 定数) は原点を中心とする円である。

等ポテンシャル線 ($\phi = -\kappa\theta =$ 定数) は原点を始点とする半直線で、流線 ($\psi = \kappa \log r =$ 定数) は原点を中心とする円である。

この流れは、原点に置かれた**渦糸**(うずいと) (vortex filament, vortex string) または**点渦**(てんうず) (point vortex) と呼ばれる。

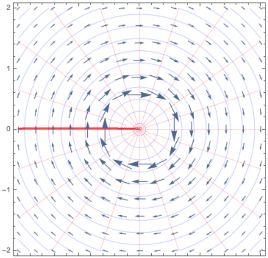
3.13.3 渦糸 (点渦) 続き

等ポテンシャル線 ($\phi = -\kappa\theta =$ 定数) は原点を始点とする半直線で、流線 ($\psi = \kappa \log r =$ 定数) は原点を中心とする円である。

この流れは、原点に置かれた**渦糸**（うずいと） (vortex filament, vortex string) または**点渦**（てんうず） (point vortex) と呼ばれる。

渦度は $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 全体で 0. (渦度が原点に集中していて他は渦なし、と考えるべきかもしれない。)

問 $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 0$ を確かめよ (f は一価正則でなく、前回の説明の範疇には収まらないので、念のため確認)。



3.13.4 Mathematica で可視化する

以上の単純な場合は、紙とペンでも十分理解可能であるが、この辺で文明の利器を。

コマンドをコピペできると便利なので、この部分の資料は WWW に置く。

`http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/fluid_mathematica/`

3.14 流れの合成

2 つの 2 次元渦なし非圧縮流があり、速度場をそれぞれ $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, また複素速度ポテンシャルを f_1, f_2 とする。

3.14 流れの合成

2 つの 2 次元渦なし非圧縮流があり、速度場をそれぞれ $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, また複素速度ポテンシャルを f_1, f_2 とする。このとき $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ を速度場とする流れは、やはり 2 次元渦なし非圧縮流であり、その複素速度ポテンシャルは $f_1 + f_2$ である。

実際、

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{v}_1 = \mathrm{rot}\ \boldsymbol{v}_2 = 0, \quad \mathrm{div}\ \boldsymbol{v}_1 = \mathrm{div}\ \boldsymbol{v}_2 = 0$$

であれば

3.14 流れの合成

2 つの 2 次元渦なし非圧縮流があり、速度場をそれぞれ $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, また複素速度ポテンシャルを f_1, f_2 とする。このとき $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ を速度場とする流れは、やはり 2 次元渦なし非圧縮流であり、その複素速度ポテンシャルは $f_1 + f_2$ である。

実際、

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v}_1 = \operatorname{rot} \boldsymbol{v}_2 = 0, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{v}_1 = \operatorname{div} \boldsymbol{v}_2 = 0$$

であれば

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rot} (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = 0, \\
&\operatorname{div} (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = 0, \\
&(f_1 + f_2)' = f_1' + f_2' = (u_1 - i v_1) + (u_2 - i v_2) \\
&\qquad\qquad\quad = (u_1 + u_2) - i(v_1 + v_2).
\end{aligned}$$

3.14 流れの合成

2 つの 2 次元渦なし非圧縮流があり、速度場をそれぞれ $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, また複素速度ポテンシャルを f_1, f_2 とする。このとき $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ を速度場とする流れは、やはり 2 次元渦なし非圧縮流であり、その複素速度ポテンシャルは $f_1 + f_2$ である。

実際、

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v}_1 = \operatorname{rot} \boldsymbol{v}_2 = 0, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{v}_1 = \operatorname{div} \boldsymbol{v}_2 = 0$$

であれば

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rot}(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = 0, \\
&\operatorname{div}(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = 0, \\
&(f_1 + f_2)' = f_1' + f_2' = (u_1 - iv_1) + (u_2 - iv_2) \\
&\qquad\qquad\quad = (u_1 + u_2) - i(v_1 + v_2).
\end{aligned}$$

流れを合成するには、複素速度ポテンシャルを足せば良い

以下、本日の最後まで 3.14 が続く。

3.14.1 一様流と湧き出しの重ね合わせ — ある無限物体をよぎる流れ

$U, m > 0$ とする。一様流 $f_1(z) = Uz$ と、湧き出し $f_2(z) = m \log z$ の重ね合わせの複素速度ポテンシャルは

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z)$$

$U, m > 0$ とする。一様流 $f_1(z) = Uz$ と、湧き出し $f_2(z) = m \log z$ の重ね合わせの複素速度ポテンシャルは

$$\begin{aligned} f(z) &= f_1(z) + f_2(z) \\ &= Uz + m \log z = Ur \cos\theta + m \log r + i\left(Ur \sin\theta + m\theta\right). \end{aligned}$$

ゆえに流れ関数は

$$\psi = Ur \sin\theta + m\theta.$$

$U, m > 0$ とする。一様流 $f_1(z) = Uz$ と、湧き出し $f_2(z) = m \log z$ の重ね合わせの複素速度ポテンシャルは

$$\begin{aligned} f(z) &= f_1(z) + f_2(z) \\ &= Uz + m \log z = Ur \cos\theta + m \log r + i\left(Ur \sin\theta + m\theta\right). \end{aligned}$$

ゆえに流れ関数は

$$\psi = Ur \sin\theta + m\theta.$$

$\theta = 0$ とすると $\psi = 0$, また $\theta = \pi$ とすると $\psi = m\pi$ であるから、これらは ψ の等高線である。ゆえに実軸 (原点を除く) は流線である。

$U, m > 0$ とする。一様流 $f_1(z) = Uz$ と、湧き出し $f_2(z) = m \log z$ の重ね合わせの複素速度ポテンシャルは

$$\begin{aligned} f(z) &= f_1(z) + f_2(z) \\ &= Uz + m \log z = Ur \cos\theta + m \log r + i\,(Ur \sin\theta + m\theta)\,. \end{aligned}$$

ゆえに流れ関数は

$$\psi = Ur \sin\theta + m\theta.$$

$\theta = 0$ とすると $\psi = 0$, また $\theta = \pi$ とすると $\psi = m\pi$ であるから、これらは ψ の等高線である。ゆえに実軸 (原点を除く) は流線である。

また $\theta \in (0, 2\pi)$, $\theta \neq \pi$ とすると

$$(1)\quad \psi = m\pi \Leftrightarrow Ur \sin\theta + m\theta = m\pi \Leftrightarrow r = \frac{m\,(\pi - \theta)}{U \sin\theta} \Leftrightarrow r = \frac{m}{U} \cdot \frac{\varphi}{\sin\varphi}.$$

ただし $\varphi := \pi - \theta$.

$\theta \in (0, \pi)$ $(\varphi \in (0, \pi))$ と $\theta \in (\pi, 2\pi)$ $(\varphi \in (-\pi, 0))$ で分けて考える。

これは右方向に無限に伸びる U 字型の曲線である [1]。流体が非粘性流体の場合、これを壁面とする物体を (U 字形領域に) 入れても、流れは影響は受けない。ゆえに、この流れは、その形の物体をよぎる流れを表している。

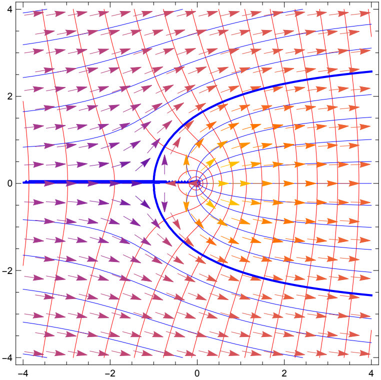


図 4: 一様流と湧き出しの重ね合わせ (太線は $\psi = \pm m\pi$)

3.14.2 同じ強さの湧き出し・吸い込みの対

$z = a$ に置いた強さ m の湧き出し、$z = -a$ に置いた強さ m の吸い込みを重ね合わせる。

$$f(z) := m \log(z - a) - m \log(z + a) = m \log \frac{z - a}{z + a}.$$

(途中で分枝が気になるが、右辺は $\mathbb{C} \setminus [-a, a]$ で一価正則である！)

3.14.2 同じ強さの湧き出し・吸い込みの対

$z = a$ に置いた強さ m の湧き出し、$z = -a$ に置いた強さ m の吸い込みを重ね合わせる。

$$f(z) := m \log(z - a) - m \log(z + a) = m \log \frac{z - a}{z + a}.$$

(途中で分枝が気になるが、右辺は $\mathbb{C} \setminus [-a, a]$ で一価正則である！)

分子, 分母の z を、それぞれ $z = a + r_1 e^{i\theta_1}$, $z = -a + r_2 e^{i\theta_2}$ で置き換えると

$$f(z) = m\left((\log r_1 + i\theta_1) - (\log r_2 + i\theta_2)\right) = m \log \frac{r_1}{r_2} + im\left(\theta_1 - \theta_2\right).$$

3.14.2 同じ強さの湧き出し・吸い込みの対

$z=a$ に置いた強さ m の湧き出し、$z=-a$ に置いた強さ m の吸い込みを重ね合わせる。

$$f(z) := m\log(z-a) - m\log(z+a) = m\log\frac{z-a}{z+a}.$$

(途中で分枝が気になるが、右辺は $\mathbb{C}\setminus[-a,a]$ で一価正則である！)
分子, 分母の z を、それぞれ $z=a+r_1e^{i\theta_1}$, $z=-a+r_2e^{i\theta_2}$ で置き換えると

$$f(z) = m\left((\log r_1 + i\theta_1) - (\log r_2 + i\theta_2)\right) = m\log\frac{r_1}{r_2} + im\left(\theta_1-\theta_2\right).$$

等ポテンシャル線の方程式は $\dfrac{r_1}{r_2} =$ 定数. アポロニウスの円を表す。

3.14.2 同じ強さの湧き出し・吸い込みの対

$z = a$ に置いた強さ m の湧き出し、$z = -a$ に置いた強さ m の吸い込みを重ね合わせる。

$$f(z) := m \log(z - a) - m \log(z + a) = m \log \frac{z - a}{z + a}.$$

(途中で分枝が気になるが、右辺は $\mathbb{C} \setminus [-a, a]$ で一価正則である！)
分子, 分母の z を、それぞれ $z = a + r_1 e^{i\theta_1}$, $z = -a + r_2 e^{i\theta_2}$ で置き換えると

$$f(z) = m \left((\log r_1 + i\theta_1) - (\log r_2 + i\theta_2) \right) = m \log \frac{r_1}{r_2} + im \left(\theta_1 - \theta_2 \right).$$

等ポテンシャル線の方程式は $\dfrac{r_1}{r_2} =$ 定数. アポロニウスの円を表す。

流線の方程式は $\Theta := \theta_1 - \theta_2 =$ 定数. Θ は a, $-a$ から点 z を見込む角であるので、2 点 $\pm a$ を結ぶ線分を弦とする円弧である (円周角の定理の逆による)。

3.14.2 同じ強さの湧き出し・吸い込みの対 (続き)

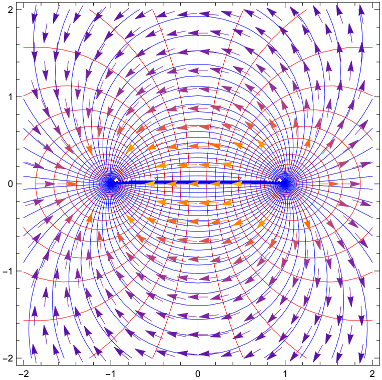


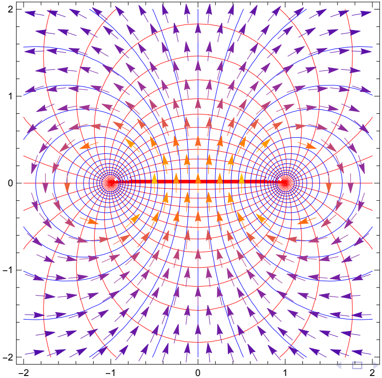
図 5: 同じ強さの湧き出しと吸い込みの重ね合わせ

3.14.3 同じ強さ反対向きの渦の対

等しい強さを持ち、回転の向きが反対の点渦を $z = a, -a$ に置いて重ね合わせた流れの複素速度ポテンシャルは

$$f(z) := i\kappa \log \frac{z-a}{z+a}.$$

等ポテンシャル線、流線の方程式はそれぞれ $\theta_1 - \theta_2 =$ 定数, $\frac{r_1}{r_2} =$ 定数で、どちらも円を表す。



3.14.4 ランキンの卵形 (Rankine body)

$U, m, a > 0$ とする。一様流 $f_1(z) = Uz$, $-a$ に置いた湧き出し $f_2(z) = m\log(z+a)$, a に置いた吸い込み $f_3(z) = -m\log(z-a)$ を重ね合わせる。

$$f(z) := Uz + m\log(z+a) - m\log(z-a) = Uz + m\log\frac{z+a}{z-a}.$$

3.14.4 ランキンの卵形 (Rankine body)

$U, m, a > 0$ とする。一様流 $f_1(z) = Uz$, $-a$ に置いた湧き出し $f_2(z) = m\log(z+a)$, a に置いた吸い込み $f_3(z) = -m\log(z-a)$ を重ね合わせる。

$$f(z) := Uz + m\log(z+a) - m\log(z-a) = Uz + m\log\frac{z+a}{z-a}.$$

流れ関数は

$$\psi = Uy - m(\theta_1 - \theta_2) = Uy - m\tan^{-1}\frac{2ay}{x^2+y^2-a^2}.$$

実軸 $y=0$ では、$\psi = 0$ であるから、実軸は 1 つの流線である。また

$$\psi = 0 \Leftrightarrow y = \frac{m}{U}\tan^{-1}\frac{2ay}{x^2+y^2-a^2}.$$

この方程式は卵形の曲線を表す。これを **Rankine の卵形** (the Rankine bpdy) と呼ぶ。

3.14.4 ランキンの卵形 (Rankine body) 続き

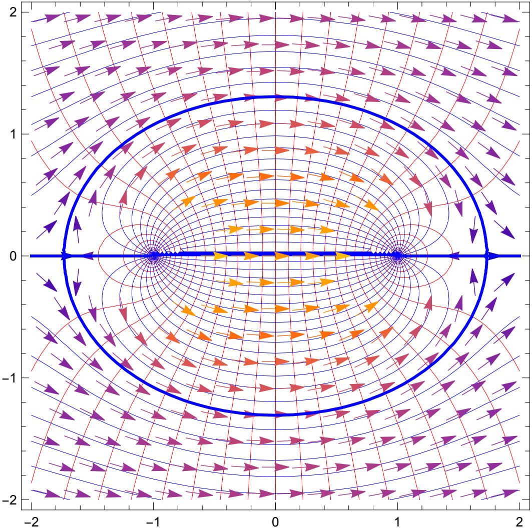


図 7: Rankine の卵形 (同じ強さの湧き出し・吸い込みと一様流の重ね合わせ)

3.14.5 2重湧き出し (doublet)

同じ強さの湧き出し・吸い込み対の流れの複素速度ポテンシャルは

$$f(z) = m\log(z-a) - m\log(z+a).$$

3.14.5 2重湧き出し (doublet)

同じ強さの湧き出し・吸い込み対の流れの複素速度ポテンシャルは

$$f(z) = m\log(z-a) - m\log(z+a).$$

$\mu > 0$ を取り、$2am = \mu$ という関係式を保ったままで、$a \to 0$ とした極限を考えよう。

3.14.5 2 重湧き出し (doublet)

同じ強さの湧き出し・吸い込み対の流れの複素速度ポテンシャルは

$$f(z) = m\log(z-a) - m\log(z+a).$$

$\mu > 0$ を取り、$2am = \mu$ という関係式を保ったままで、$a \to 0$ とした極限を考えよう。

$$f(z) = m\log(z-a) - m\log(z+a) = -\mu\frac{\log(z+a) - \log(z-a)}{2a}$$

3.14.5 2重湧き出し (doublet)

同じ強さの湧き出し・吸い込み対の流れの複素速度ポテンシャルは

$$f(z) = m\log(z-a) - m\log(z+a).$$

$\mu > 0$ を取り、$2am = \mu$ という関係式を保ったままで、$a \to 0$ とした極限を考えよう。

$$\begin{aligned} f(z) &= m\log(z-a) - m\log(z+a) = -\mu\frac{\log(z+a)-\log(z-a)}{2a} \\ &\to F(z) := -\mu\frac{d}{dz}\log z = -\frac{\mu}{z} = \frac{-\mu x}{x^2+y^2} + i\frac{\mu y}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

3.14.5 2 重湧き出し (doublet)

同じ強さの湧き出し・吸い込み対の流れの複素速度ポテンシャルは

$$f(z) = m\log(z-a) - m\log(z+a).$$

$\mu > 0$ を取り、$2am = \mu$ という関係式を保ったままで、$a \to 0$ とした極限を考えよう。

$$\begin{aligned} f(z) = m\log(z-a) - m\log(z+a) &= -\mu\frac{\log(z+a)-\log(z-a)}{2a} \\ \to F(z) := -\mu\frac{d}{dz}\log z &= -\frac{\mu}{z} = \frac{-\mu x}{x^2+y^2} + i\frac{\mu y}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

F を複素速度ポテンシャルとする流れを**二重湧き出し** (doublet) と呼ぶ。

3.14.5 2 重湧き出し (doublet) (続き)

$F(z) := -\frac{\mu}{z}$ の定める流れの等ポテンシャル線は、実軸上に中心を持ち原点を通る円、または虚軸 (原点を除く) である。

一方、流線は、虚軸上に中心を持ち原点を通る円または実軸 (原点を除く) である。

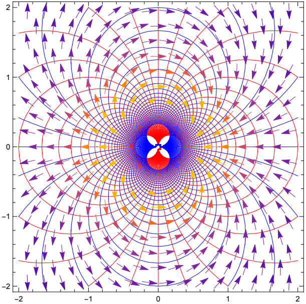


図 8: 二重湧き出し (同じ強さの湧き出し・吸い込みの極限)

3.14.6 円柱を過ぎる一様流

ランキンの卵形で $2am = \mu$ (正定数) として $a \to 0$ としてみよう (二重湧き出しと一様流との重ね合わせ、とも言える)。

3.14.6 円柱を過ぎる一様流

ランキンの卵形で $2am = \mu$ (正定数) として $a \to 0$ としてみよう (二重湧き出しと一様流との重ね合わせ、とも言える)。

$$f(z) = Uz + \frac{\mu}{z} = U\left(z + \frac{R^2}{z}\right), \quad R := \sqrt{\mu/U}.$$

ランキンの卵形で $2am = \mu$ (正定数) として $a \to 0$ としてみよう (二重湧き出しと一様流との重ね合わせ、とも言える)。

$$f(z) = Uz + \frac{\mu}{z} = U\left(z + \frac{R^2}{z}\right), \quad R := \sqrt{\mu/U}.$$

$$f(re^{i\theta}) = U\left(r\cos\theta + i\sin\theta + \frac{R^2}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)\right)$$

であるから、速度ポテンシャル ϕ と流れ関数 ψ は

$$\phi = U\left(r + \frac{R^2}{r}\right)\cos\theta, \quad \psi = U\left(r - \frac{R^2}{r}\right)\sin\theta.$$

3.14.6 円柱を過ぎる一様流

ランキンの卵形で $2am = \mu$ (正定数) として $a \to 0$ としてみよう (二重湧き出しと一様流との重ね合わせ、とも言える)。

$$f(z) = Uz + \frac{\mu}{z} = U\left(z + \frac{R^2}{z}\right), \quad R := \sqrt{\mu/U}.$$

$$f(re^{i\theta}) = U\left(r\cos\theta + i\sin\theta + \frac{R^2}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)\right)$$

であるから、速度ポテンシャル ϕ と流れ関数 ψ は

$$\phi = U\left(r + \frac{R^2}{r}\right)\cos\theta, \quad \psi = U\left(r - \frac{R^2}{r}\right)\sin\theta.$$

特に円周 $r = R$ 上で $\psi = 0$ であるから、$r = R$ は流線である。

3.14.6 円柱を過ぎる一様流 (続き)

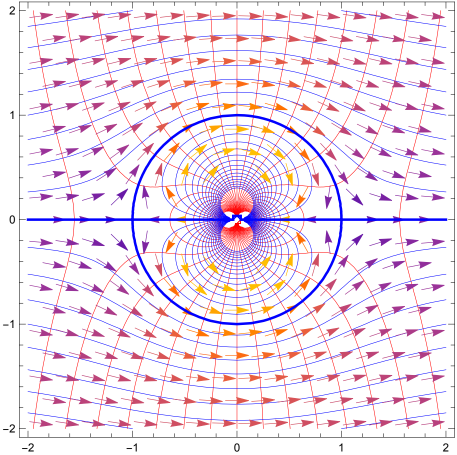


図 9: 円柱を過ぎる一様流

完全流体の一様流の中に円柱を入れると

レポート課題1

コンピューター実習を伴う課題の1番。「1,2,3から2つ提出せよ」としてあるが、今回のは比較的簡単なはずなので、提出するのがオススメ。課題文は以下にある (Oh-o! Meiji からもリンクが張られている)。

`http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/report1/`

- 締め切りは7月5日 (23:00). 提出は Oh-o! Meiji を用いる。
- 原則として、レポート本文はA4サイズのPDF形式とする。A4レポート用紙に手書きしたものをスキャンしても良い。
- プログラムとその実行結果、実行するための情報 (入力パラメーターは何かとか) もレポートに含めること。

参考文献

[1] 桂田祐史：複素関数と流体力学, http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/intro-fluid.pdf (2015～).

[2] 桂田祐史：多変数の微分積分学 2 講義ノート 第 2 部, http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu2/tahensuu2-p2.pdf (内容はベクトル解析) (2006～).

[3] 今井功：複素解析と流体力学, 日本評論社 (1981/10/20, 1989/4/1).

[4] Ahlfors, K.: *Complex Analysis*, McGraw Hill (1953), 笠原 乾吉 訳, 複素解析, 現代数学社 (1982).