応用複素関数 第 6 回
〜 流体力学への応用 (2) 〜

かつらだ　まさし
桂田 祐史

2021 年 5 月 25 日

目次

本日の内容・連絡事項

- (前回から) 複素関数の流体力学への応用を説明しているが、それについての講義ノート [1] を用意してある。
- 前回は流体力学の方程式の解説を行った。今回は 2 次元流の話をする。渦なしの場合、非圧縮の場合をそれぞれ論じて、最後に、2 次元渦なし非圧縮流の正体 (複素速度ポテンシャル) が正則関数であることを示す。
  初めて聴く場合は、それなりに複雑に感じられる話が長く続くが、最後に実を結ぶので (オチが付くので)、頑張って下さい。
- 本日の議論で用いる数学は、簡単なベクトル解析である。これについては、この PDF 末尾に用いることをとりあえずまとめておいた (しかし未習の人は見てもわかり難いかも)。

3.9 渦度　駆け足の説明

$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$ を流体の速度場とするとき

$$\boldsymbol{\omega}:=\operatorname{rot}\boldsymbol{v}=\nabla\times\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial v_3}{\partial x_2}-\dfrac{\partial v_2}{\partial x_3}\\ \dfrac{\partial v_1}{\partial x_3}-\dfrac{\partial v_3}{\partial x_1}\\ \dfrac{\partial v_2}{\partial x_1}-\dfrac{\partial v_1}{\partial x_2}\end{pmatrix}$$

を**渦度**(うずど) (vorticity) と呼ぶ。

物理的には流体粒子の “自転” の角速度の 2 倍と解釈できる (そうである)。

良くある誤解： 水槽の中で水がグルグル回っていても、渦の中心以外では $\boldsymbol{\omega}=\mathbf{0}$ ということがありうる。

$\boldsymbol{\omega}=\mathbf{0}$ のとき、流れは**渦なし**, **非回転** (irrotational), **層状** (lammelar) などという。

しかし「渦なし」という場合、もう少し強く、ポテンシャル流である (次のスライドを見よ) という意味で使う場合があるようだ。

Lagrange の渦定理 「完全流体の、外力が保存力である流れでは、ある時刻で $\boldsymbol{\omega}=\mathbf{0}$ であれば、その後も $\boldsymbol{\omega}=\mathbf{0}$ である。」

ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ に対して、$\boldsymbol{v} = \nabla\phi$ ($\nabla\phi = \operatorname{grad}\phi$) を満たす ϕ が存在するとき、ϕ を $\boldsymbol{v}$ の**ポテンシャル** と呼ぶ。特に $\boldsymbol{v}$ が速度場のとき、ϕ を $\boldsymbol{v}$ の**速度ポテンシャル**と呼ぶ。

速度ポテンシャルが存在する流れを、**ポテンシャル流**であるという。

ポテンシャル流は渦なしである。

($\because$ 一般に $\operatorname{rot}\operatorname{grad} = \mathbf{0}$ が成り立つので、$\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot}\boldsymbol{v} = \operatorname{rot}\operatorname{grad}\phi = \mathbf{0}$.)

単連結領域における渦なしの流れはポテンシャル流である。

($\because$ これもベクトル解析の常識 — この PDF の末尾で少し説明)

- 一般には、渦なしであっても、ポテンシャル流であるとは限らない。
- 任意の開球は単連結領域であるから、渦なしの流れは局所的にはポテンシャルを持つことが分かる。
- 多価関数のポテンシャルを認めると、より一般の渦なしの流れのポテンシャルが存在することが分かる。

粗くまとめると

渦なしの流れ $\fallingdotseq$ ポテンシャル流

3.10.2 非圧縮ポテンシャル流を定める Laplace 方程式の境界値問題

領域 Ω における速度場 $\boldsymbol{v}$ が、**速度ポテンシャル ϕ を持つ**とすると、

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = \operatorname{div}\operatorname{grad}\phi = \triangle\phi.$$

さらに流れが**非圧縮** ($\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$) と仮定すると

$$\triangle\phi = 0.$$

一方、領域の境界 $\partial\Omega$ 上の点において、

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} = \nabla\phi\cdot\boldsymbol{n} = \frac{\partial\phi}{\partial n}.$$

(青字で書いたものは一般に成り立つ公式である。)

ゆえに ϕ は、次の **Laplace 方程式の Neumann 境界値問題**の解である。

(1) $$\triangle\phi = 0 \quad (\text{in } \Omega)$$

(2) $$\frac{\partial\phi}{\partial n} = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} \quad (\text{on } \partial\Omega).$$

もしも $\boldsymbol{v}$ の $\partial\Omega$ での値が既知ならば、この問題を解いて ϕ が (ゆえに $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad}\phi$ も) 求まる。この問題はポピュラーで、数値計算のやり方もよりどり

3.10.2 非圧縮ポテンシャル流を定める Laplace 方程式の境界値問題

$g\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ とする。Laplace 方程式の Neumann 境界値問題

$$\triangle\phi = 0 \quad (\text{in } \Omega) \tag{3}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = g \quad (\text{on } \partial\Omega) \tag{4}$$

の解が存在するためには、$\displaystyle\int_{\partial\Omega} g\, d\sigma = 0$ が必要かつ (ほぼ) 十分である。

(必要性: $\displaystyle\int_{\partial\Omega} g\, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \operatorname{grad}\phi \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div}\operatorname{grad}\phi\, d\boldsymbol{x} = \int_{\Omega} \triangle\phi\, d\boldsymbol{x} = \int_{\Omega} 0\, d\boldsymbol{x} = 0$)

今の流れの問題では、この条件はつねに満たされる。実際、$g = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$ で、非圧縮 $\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$ を仮定しているので、Gauss の発散定理から

$$\int_{\partial\Omega} g\, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div}\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x} = \int_{\Omega} 0\, d\boldsymbol{x} = 0.$$

解には定数差の自由度が残る (解 + 定数は解、2 つの解の差は定数)。

3.10.3 まとめ

3 次元で、非圧縮のポテンシャル流は、Laplace 方程式の Neumann 境界値問題を解くことで「解ける」ことが分かった。

2 次元の場合も同様のことが成り立つが、実はより便利に、複素関数論が適用できる、という話を以下で紹介する。

(一方、2 次元の Laplace 方程式の境界値問題は、複素関数論のあちこちで登場する。直接的に正則関数が登場しないが、複素関数論の項目の一つと考えるべきかもしれない。)

速度場 $\boldsymbol{v}$ が $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)=\begin{pmatrix}u(x,y,t)\\ v(x,y,t)\\ 0\end{pmatrix}$ の形をしているとき、流れは 2 次元的, **2 次元流**であるという (このとき、$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z}=0$, $\boldsymbol{v}$ の z 成分 $=0$. 逆は必ずしも真ではない。)。

このとき渦度は

$$\boldsymbol{\omega}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\end{pmatrix}.$$

そこで、2 次元ベクトル場 $\boldsymbol{v}(x,y,t)=\begin{pmatrix}u(x,y,t)\\ v(x,y,t)\end{pmatrix}$ に対して、

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}:=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}$$

と定め、これを $\boldsymbol{v}$ の**渦度**と呼ぶことがある。この講義でも採用する。

3.11.1 渦度, 渦無しの流れ

2 次元流についても、3 次元流とほぼ同じことが成立する。

命題 6.1 (2 次元流における渦なし流)

2 次元の速度場 $\boldsymbol{v}$ について

1. $\boldsymbol{v}$ のポテンシャルが存在すれば渦なし ($\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} = 0$)。
2. 渦なし ($\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} = 0$) ならば、任意の単連結領域で $\boldsymbol{v}$ のポテンシャルが存在する。
3. $\boldsymbol{v}$ のポテンシャル ϕ が存在するとき、$\triangle\phi = \mathrm{div}\,\boldsymbol{v}$. 特に非圧縮流ならば $\triangle\phi = 0$.

ただし $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} := \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}$ とする。

証明は 3 次元の場合と同じ。

3.11.2 非圧縮流と流れ関数 (1)

2 次元流の速度場 $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ に対して、

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = u$$

を満たす ψ が存在するとき、ψ を $\boldsymbol{v}$ の**流れ関数** (stream function) と呼ぶ。

定義 6.2 (流線)

曲線が速度場 $\boldsymbol{v}$ の**流線** (stream line) とは、曲線上の各点で、曲線の接ベクトルが $\boldsymbol{v}$ と平行であることをいう。

注意　流れ関数の等高線 ($\psi =$ const. で定まる曲線) のことを流線と定義することもあるが、ここでしたように、流線は流れ関数を用いずに定義することもできる。そうしておいて、流れ関数が存在する場合は、その等高線が流線になる、と論じることを選んだ。)

命題 6.3

流れ関数が存在するとき、その等高線は流線である。

証明.

$\nabla\psi \cdot \boldsymbol{v} = \psi_x u + \psi_y v = -vu + uv = 0$ であるから $\nabla\psi \perp \boldsymbol{v}$. $\nabla\psi$ は流れ関数 ψ の等高線の法線ベクトルであるから、それが $\boldsymbol{v}$ と直交することは、流れ関数の等高線の接線ベクトルが $\boldsymbol{v}$ と平行であることを意味する。ゆえに流れ関数の等高線は流線である。 □

より具体的に、$\nabla\psi$ を $-\frac{\pi}{2}$ 回転すると $\boldsymbol{v}$ に等しい。実際

$$\begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} \nabla\psi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_x \\ \psi_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_y \\ -\psi_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \boldsymbol{v}.$$

命題 6.4 (非圧縮流と流れ関数)

2 次元の速度場 $\boldsymbol{v}$ について

1. $\boldsymbol{v}$ の流れ関数が存在すれば非圧縮 $(\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}=0)$。
2. 非圧縮 $(\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}=0)$ ならば、任意の単連結領域で $\boldsymbol{v}$ の流れ関数が存在する。
3. $\boldsymbol{v}$ の流れ関数 ψ が存在するとき、$\triangle\psi=-\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}$. 特に渦なしならば $\triangle\psi=0$.

ただし $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}:=\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}$ とする。　既視感があるね。とにかく証明するけど。

証明 (1) $\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}=\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial\psi}{\partial y}+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(-\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x}=0.$

(2) $\mathrm{rot}\begin{pmatrix}-v\\ u\end{pmatrix}=\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial}{\partial x}(-v)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}=0$ であるから、任意の単連結領域で $\psi(\boldsymbol{x}):=\displaystyle\int_{C_x}\begin{pmatrix}-v\\ u\end{pmatrix}\cdot d\boldsymbol{r}$ が well-defined であり、$\dfrac{\partial\psi}{\partial x}=-v$, $\dfrac{\partial\psi}{\partial y}=u$. ゆえに ψ は $\boldsymbol{v}$ の流れ関数である。

(3) $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}=\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right)-\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial\psi}{\partial y}=-\triangle\psi.$ □

3.11 2次元流　非圧縮流と流れ関数 (4) 流れ関数の意味

(流れ関数の意味を説明するが、最初に学ぶときは、とりあえず飛ばしても良い。)

考えている領域 Ω 内に定点 $\boldsymbol{a}$ を選び、$\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{x} \in \Omega$ に至る Ω 内の曲線 $C_{\boldsymbol{x}}$ を取ると、$\psi(\boldsymbol{x}) := \displaystyle\int_{C_{\boldsymbol{x}}} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} \cdot d\boldsymbol{r}$ が流れ関数となった。弧長パラメーター s を用いると、$\boldsymbol{t} := \begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(s) \end{pmatrix}$ は単位接線ベクトルとなり

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \int_{C_{\boldsymbol{x}}} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{C_{\boldsymbol{x}}} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{t}\, ds = \int_{C_{\boldsymbol{x}}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, ds.$$

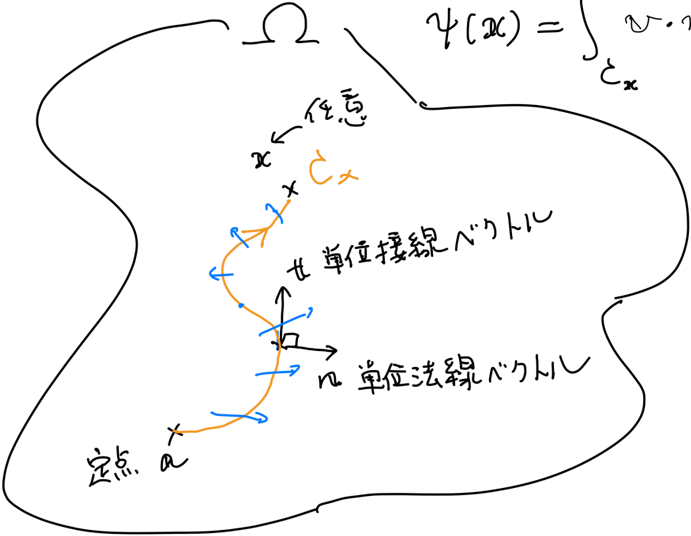
ただし

$$\boldsymbol{n} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{t} = \begin{pmatrix} y'(s) \\ -x'(s) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

($\boldsymbol{n}$ は $\boldsymbol{t}$ を $-\pi/2$ 回転したもので、単位法線ベクトルである。)

$\psi(\boldsymbol{x})$ はいわゆる**流束積分** (flux integral) である。すなわち、$C_{\boldsymbol{x}}$ を横切り、$\boldsymbol{n}$ の側に単位時間に流れる流体の量 (2 次元なので面積) である。

$$\psi(x) = \int_{C_x} v \cdot n \, ds$$



複素測度ポテンシャル f が存在する場合は、流束積分は複素積分で計算できる:

$$\int_C \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\, ds = \mathrm{Im} \int_C f'(z)\, dz. \tag{5}$$

実際、

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\, ds = -v\, dx + u\, dy = \psi_x dx + \psi_y dy,$$

$$\begin{aligned} f'(z)\, dz &= (\phi_x + i\psi_x)(dx + i\, dy) \\ &= (\phi_x dx - \psi_x dy) + i(\psi_x dx + \phi_x dy) \\ &= (\phi_x dx + \phi_y dy) + i(\psi_x dx + \psi_y dy) \end{aligned}$$

であるから

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\, ds = \mathrm{Im}\, f'(z)\, dz.$$

3.11.3 単連結領域における 2 次元非圧縮渦なし流 (1)

今日の議論を振り返る。3.12, 3.13 の定理を並べる。

命題 6.5 (渦なし流と速度ポテンシャル)

2 次元の速度場 $\boldsymbol{v}$ について

1. $\boldsymbol{v}$ のポテンシャルが存在すれば渦なし ($\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} = 0$)。
2. 渦なし ($\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} = 0$) ならば、任意の単連結領域で $\boldsymbol{v}$ のポテンシャルが存在する。
3. $\boldsymbol{v}$ のポテンシャル ϕ が存在するとき、$\triangle\phi = \mathrm{div}\,\boldsymbol{v}$. 特に非圧縮流ならば $\triangle\phi = 0$.

ただし $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} := \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ とする。

命題 6.6 (非圧縮流と流れ関数)

2 次元の速度場 $\boldsymbol{v}$ について

1. $\boldsymbol{v}$ の流れ関数が存在すれば非圧縮 ($\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0$)。
2. 非圧縮 ($\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0$) ならば、任意の単連結領域で $\boldsymbol{v}$ の流れ関数が存在する。
3. $\boldsymbol{v}$ の流れ関数 ψ が存在するとき、$\triangle\psi = -\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}$. 特に渦なしならば $\triangle\psi = 0$.

ただし $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} := \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ とする。

3.11 単連結領域における 2 次元非圧縮渦なし流 (2) 関数論との関係

渦なし、非圧縮の両方を仮定するとどうなるか。ある ϕ, ψ が存在して

$$\nabla\phi = \begin{pmatrix}\phi_x\\ \phi_y\end{pmatrix} = \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}\psi_y\\ -\psi_x\end{pmatrix}.$$

そして

$$\triangle\phi = \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0, \quad \triangle\psi = -\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = 0.$$

このとき

$$f(x+iy) := \phi(x,y) + i\psi(x,y)$$

とおき、f を $\boldsymbol{v}$ の**複素速度ポテンシャル**と呼ぶ。

実は **f は正則関数である**。実際

$$\phi_x = u = \psi_y, \quad \phi_y = v = -\psi_x$$

であるから、Cauchy-Riemann 方程式が成り立つ。また

$$f' = u - iv \quad (\text{微分すると速度が得られる}).$$

実際、$f' = \phi_x + i\psi_x = u + i(-v) = u - iv$.

おまけ: ベクトル解析の復習 (1) grad, div, rot, △

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = \nabla \cdot \boldsymbol{u} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}.$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{u} = \operatorname{curl} \boldsymbol{u} = \nabla \times \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

$$\triangle f = \nabla^2 f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}, \quad \triangle \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \triangle u_1 \\ \vdots \\ \triangle u_n \end{pmatrix}.$$

$$\int_V \operatorname{div} \boldsymbol{u}\, dx = \int_{\partial V} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma \quad \text{(Gauss の発散定理)}.$$

おまけ: ベクトル解析の復習 (2)　2 回作用させると何になる

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{rot}\operatorname{grad} = \mathbf{0} \quad (\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}),\\
&\operatorname{div}\operatorname{grad} = \triangle \quad (\nabla \cdot \nabla f = \triangle f),\\
&\operatorname{div}\operatorname{rot} = 0 \quad (\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{u}) = 0),\\
&\operatorname{rot}\operatorname{rot} = \operatorname{grad}\operatorname{div} - \triangle \quad (\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{u}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) - \triangle \boldsymbol{u}).
\end{aligned}
$$

方向微分係数の定義と合成関数の微分法から

$$
\nabla f \cdot \boldsymbol{n} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}.
$$

おまけ: ベクトル解析の復習 (3) ポテンシャルの存在

命題 6.7 (ポテンシャルの存在定理)

$\mathbb{R}^n$ の単連結領域 Ω におけるベクトル場 $\boldsymbol{f} = (f_i)$ が $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$ $(1 \le i \le n,\ 1 \le j \le n)$ を満たすならば、$F(\boldsymbol{x}) := \displaystyle\int_{C_{\boldsymbol{x}}} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r}$ は $C_{\boldsymbol{x}}$ の取り方によらず well-defined であり、$\nabla F = \boldsymbol{f}$ を満たす。ただし $C_{\boldsymbol{x}}$ は定点から $\boldsymbol{x}$ に至る Ω 内の曲線である。

特に 3 次元ベクトル場 $\boldsymbol{f}$ が $\operatorname{rot} \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$ を満たす場合、2 次元ベクトル場 $\boldsymbol{f}$ が $\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0$ を満たす場合、$\boldsymbol{f}$ はポテンシャルを持つ。

理解を深めるための注意を 2 つ

- 1 変数関数の場合の $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$ に相当する。
- C^1 級のポテンシャル F が存在する場合、$\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}$, $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}$ であるから、$\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$ が成り立つことは明らかである。

入門部分のベクトル解析については、例えば桂田 [2] を見よ。

参考文献

[1] 桂田祐史：複素関数と流体力学, http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/intro-fluid.pdf (2015〜).

[2] 桂田祐史：多変数の微分積分学 2 講義ノート 第 2 部, http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu2/tahensuu2-p2.pdf (内容はベクトル解析) (2006〜).