

応用複素関数 第6回

～ 流体力学への応用 (2) ～

かつらだ まさし
桂田 祐史

2021年5月25日

目次

1 流体力学への複素関数の応用

- 渦度 駆け足の説明
- ポテンシャル流
 - ポテンシャル, 渦無し
 - 非圧縮ポテンシャル流を定める Laplace 方程式の境界値問題
 - まとめ
- 2次元流
 - 渦度, 渦無しの流れ
 - 非圧縮流と流れ関数
 - 単連結領域における 2次元非圧縮渦なし流

2 おまけ: ベクトル解析の復習

3 参考文献

- (前回から) 複素関数の流体力学への応用を説明しているが、それについての講義ノート [1] を用意してある。

- (前回から) 複素関数の流体力学への応用を説明しているが、それについての講義ノート [1] を用意してある。
- 前回は流体力学の方程式の解説を行った。今回は2次元流の話をする。渦なしの場合、非圧縮の場合をそれぞれ論じて、最後に、2次元渦なし非圧縮流の正体 (複素速度ポテンシャル) が正則関数であることを示す。
初めて聴く場合は、それなりに複雑に感じられる話が長く続くが、最後に実を結ぶので (オチが付くので)、頑張ってください。

- (前回から) 複素関数の流体力学への応用を説明しているが、それについての講義ノート [1] を用意してある。
- 前は流体力学の方程式の解説を行った。今回は2次元流の話をする。渦なしの場合、非圧縮の場合をそれぞれ論じて、最後に、2次元渦なし非圧縮流の正体 (複素速度ポテンシャル) が正則関数であることを示す。
初めて聴く場合は、それなりに複雑に感じられる話が長く続くが、最後に実を結ぶので (オチが付くので)、頑張ってください。
- 本日の議論で用いる数学は、簡単なベクトル解析である。これについては、このPDF末尾に用いることをとりあえずまとめておいた (しかし未習の人は見てもわかり難いかも)。

3.9 渦度 駆け足の説明

$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ を流体の速度場とするとき

$$\boldsymbol{\omega} := \text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

を^{うずど}渦度 (vorticity) と呼ぶ。

物理的には流体粒子の“自転”の角速度の2倍と解釈できる(そうである)。

3.9 渦度 駆け足の説明

$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ を流体の速度場とするとき

$$\boldsymbol{\omega} := \text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

を^{うずど}渦度 (vorticity) と呼ぶ。

物理的には流体粒子の“自転”の角速度の2倍と解釈できる(そうである)。

良くある誤解：水槽の中で水がグルグル回っていても、渦の中心以外では $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ ということがありうる。

3.9 渦度 駆け足の説明

$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ を流体の速度場とするとき

$$\boldsymbol{\omega} := \text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

を^{うずど}渦度 (vorticity) と呼ぶ。

物理的には流体粒子の“自転”の角速度の2倍と解釈できる(そうである)。

良くある誤解：水槽の中で水がグルグル回っていても、渦の中心以外では $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ ということがありうる。

$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ のとき、流れは渦なし, 非回転 (irrotational), 層状 (lammelar) などという。

3.9 渦度 駆け足の説明

$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ を流体の速度場とするとき

$$\boldsymbol{\omega} := \text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

を^{うずど}渦度 (vorticity) と呼ぶ。

物理的には流体粒子の“自転”の角速度の2倍と解釈できる(そうである)。

良くある誤解：水槽の中で水がグルグル回っていても、渦の中心以外では $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ ということがありうる。

$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ のとき、流れは渦なし, 非回転 (irrotational), 層状 (lammelar) などという。

しかし「渦なし」という場合、もう少し強く、ポテンシャル流である(次のスライドを見よ)という意味で使う場合があるようだ。

3.9 渦度 駆け足の説明

$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ を流体の速度場とするとき

$$\boldsymbol{\omega} := \text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

を^{うずど}渦度 (vorticity) と呼ぶ。

物理的には流体粒子の“自転”の角速度の2倍と解釈できる(そうである)。

良くある誤解：水槽の中で水がグルグル回っていても、渦の中心以外では $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ ということがありうる。

$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ のとき、流れは渦なし, 非回転 (irrotational), 層状 (lammelar) などという。

しかし「渦なし」という場合、もう少し強く、ポテンシャル流である(次のスライドを見よ)という意味で使う場合があるようだ。

Lagrange の渦定理 「完全流体の、外力が保存力である流れでは、ある時刻で $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ であれば、その後も $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ である。」

ベクトル場 \mathbf{v} に対して、 $\mathbf{v} = \nabla\phi$ ($\nabla\phi = \text{grad } \phi$) を満たす ϕ が存在するとき、 ϕ を \mathbf{v} の **ポテンシャル** と呼ぶ。特に \mathbf{v} が速度場するとき、 ϕ を \mathbf{v} の **速度ポテンシャル** と呼ぶ。

速度ポテンシャルが存在する流れを、**ポテンシャル流**であるという。

ベクトル場 \mathbf{v} に対して、 $\mathbf{v} = \nabla\phi$ ($\nabla\phi = \text{grad } \phi$) を満たす ϕ が存在するとき、 ϕ を \mathbf{v} の **ポテンシャル** と呼ぶ。特に \mathbf{v} が速度場のとき、 ϕ を \mathbf{v} の **速度ポテンシャル** と呼ぶ。

速度ポテンシャルが存在する流れを、**ポテンシャル流**であるという。

ポテンシャル流は渦なしである。

(\because 一般に $\text{rot grad} = \mathbf{0}$ が成り立つので、 $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v} = \text{rot grad } \phi = \mathbf{0}$.)

ベクトル場 \mathbf{v} に対して、 $\mathbf{v} = \nabla\phi$ ($\nabla\phi = \text{grad } \phi$) を満たす ϕ が存在するとき、 ϕ を \mathbf{v} の **ポテンシャル** と呼ぶ。特に \mathbf{v} が速度場するとき、 ϕ を \mathbf{v} の **速度ポテンシャル** と呼ぶ。

速度ポテンシャルが存在する流れを、**ポテンシャル流**であるという。

ポテンシャル流は渦なしである。

(\because 一般に $\text{rot grad} = \mathbf{0}$ が成り立つので、 $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v} = \text{rot grad } \phi = \mathbf{0}$.)

単連結領域における渦なしの流れはポテンシャル流である。

(\because これもベクトル解析の常識 — この PDF の末尾で少し説明)

ベクトル場 \mathbf{v} に対して、 $\mathbf{v} = \nabla\phi$ ($\nabla\phi = \text{grad } \phi$) を満たす ϕ が存在するとき、 ϕ を \mathbf{v} の **ポテンシャル** と呼ぶ。特に \mathbf{v} が速度場するとき、 ϕ を \mathbf{v} の **速度ポテンシャル** と呼ぶ。

速度ポテンシャルが存在する流れを、**ポテンシャル流** であるという。

ポテンシャル流は渦なしである。

(\because 一般に $\text{rot grad} = \mathbf{0}$ が成り立つので、 $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v} = \text{rot grad } \phi = \mathbf{0}$.)

単連結領域における渦なしの流れはポテンシャル流である。

(\because これもベクトル解析の常識 — この PDF の末尾で少し説明)

- 一般には、渦なしであっても、ポテンシャル流であるとは限らない。
- 任意の開球は単連結領域であるから、渦なしの流れは局所的にはポテンシャルを持つことが分かる。
- 多価関数のポテンシャルを認めると、より一般の渦なしの流れのポテンシャルが存在することが分かる。

ベクトル場 \mathbf{v} に対して、 $\mathbf{v} = \nabla\phi$ ($\nabla\phi = \text{grad } \phi$) を満たす ϕ が存在するとき、 ϕ を \mathbf{v} の **ポテンシャル** と呼ぶ。特に \mathbf{v} が速度場のとき、 ϕ を \mathbf{v} の **速度ポテンシャル** と呼ぶ。

速度ポテンシャルが存在する流れを、**ポテンシャル流** であるという。

ポテンシャル流は渦なしである。

(\because 一般に $\text{rot grad} = \mathbf{0}$ が成り立つので、 $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v} = \text{rot grad } \phi = \mathbf{0}$.)

単連結領域における渦なしの流れはポテンシャル流である。

(\because これもベクトル解析の常識 — この PDF の末尾で少し説明)

- 一般には、渦なしであっても、ポテンシャル流であるとは限らない。
- 任意の開球は単連結領域であるから、渦なしの流れは局所的にはポテンシャルを持つことが分かる。
- 多価関数のポテンシャルを認めると、より一般の渦なしの流れのポテンシャルが存在することが分かる。

粗くまとめると

渦なしの流れ \equiv ポテンシャル流

3.10.2 非圧縮ポテンシャル流を定める Laplace 方程式の境界値問題

領域 Ω における速度場 \mathbf{v} が、**速度ポテンシャル ϕ を持つ**とすると、

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \phi = \Delta \phi.$$

3.10.2 非圧縮ポテンシャル流を定める Laplace 方程式の境界値問題

領域 Ω における速度場 \mathbf{v} が、**速度ポテンシャル ϕ を持つ**とすると、

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \phi = \Delta \phi.$$

さらに流れが**非圧縮** ($\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$) と仮定すると

$$\Delta \phi = 0.$$

3.10.2 非圧縮ポテンシャル流を定める Laplace 方程式の境界値問題

領域 Ω における速度場 \mathbf{v} が、**速度ポテンシャル ϕ を持つ**とすると、

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \phi = \Delta \phi.$$

さらに流れが**非圧縮** ($\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$) と仮定すると

$$\Delta \phi = 0.$$

一方、領域の境界 $\partial\Omega$ 上の点において、

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \nabla \phi \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \phi}{\partial n}.$$

(**青字**で書いたものは一般に成り立つ公式である。)

3.10.2 非圧縮ポテンシャル流を定める Laplace 方程式の境界値問題

領域 Ω における速度場 \mathbf{v} が、**速度ポテンシャル ϕ を持つ**とすると、

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \phi = \Delta \phi.$$

さらに流れが**非圧縮** ($\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$) と仮定すると

$$\Delta \phi = 0.$$

一方、領域の境界 $\partial\Omega$ 上の点において、

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \nabla \phi \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \phi}{\partial n}.$$

(青字で書いたものは一般に成り立つ公式である。)

ゆえに ϕ は、次の **Laplace 方程式の Neumann 境界値問題** の解である。

$$(1) \quad \Delta \phi = 0 \quad (\text{in } \Omega)$$

$$(2) \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \quad (\text{on } \partial\Omega).$$

もしも \mathbf{v} の $\partial\Omega$ での値が既知ならば、この問題を解いて ϕ が (ゆえに $\mathbf{v} = \operatorname{grad} \phi$ も) 求まる。この問題はポピュラーで、数値計算のやり方もよりどり

3.10.2 非圧縮ポテンシャル流を定める Laplace 方程式の境界値問題

$g: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ とする。Laplace 方程式の Neumann 境界値問題

$$(3) \quad \Delta\phi = 0 \quad (\text{in } \Omega)$$

$$(4) \quad \frac{\partial\phi}{\partial n} = g \quad (\text{on } \partial\Omega)$$

の解が存在するためには、 $\int_{\partial\Omega} g \, d\sigma = 0$ が必要かつ (ほぼ) 十分である。

$$(\text{必要性: } \int_{\partial\Omega} g \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \text{grad } \phi \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div grad } \phi \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \Delta\phi \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} 0 \, d\mathbf{x} = 0)$$

3.10.2 非圧縮ポテンシャル流を定める Laplace 方程式の境界値問題

$g: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ とする。Laplace 方程式の Neumann 境界値問題

$$(3) \quad \Delta\phi = 0 \quad (\text{in } \Omega)$$

$$(4) \quad \frac{\partial\phi}{\partial n} = g \quad (\text{on } \partial\Omega)$$

の解が存在するためには、 $\int_{\partial\Omega} g \, d\sigma = 0$ が必要かつ (ほぼ) 十分である。

$$(\text{必要性: } \int_{\partial\Omega} g \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \text{grad } \phi \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div grad } \phi \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \Delta\phi \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} 0 \, d\mathbf{x} = 0)$$

今の流れの問題では、この条件はつねに満たされる。

3.10.2 非圧縮ポテンシャル流を定める Laplace 方程式の境界値問題

$g: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ とする。Laplace 方程式の Neumann 境界値問題

$$(3) \quad \Delta\phi = 0 \quad (\text{in } \Omega)$$

$$(4) \quad \frac{\partial\phi}{\partial n} = g \quad (\text{on } \partial\Omega)$$

の解が存在するためには、 $\int_{\partial\Omega} g \, d\sigma = 0$ が必要かつ (ほぼ) 十分である。

$$(\text{必要性: } \int_{\partial\Omega} g \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \text{grad } \phi \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div grad } \phi \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \Delta\phi \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} 0 \, d\mathbf{x} = 0)$$

今の流れの問題では、この条件はつねに満たされる。実際、 $g = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ で、非圧縮 $\text{div } \mathbf{v} = 0$ を仮定しているので、Gauss の発散定理から

$$\int_{\partial\Omega} g \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div } \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} 0 \, d\mathbf{x} = 0.$$

3.10.2 非圧縮ポテンシャル流を定める Laplace 方程式の境界値問題

$g: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ とする。Laplace 方程式の Neumann 境界値問題

$$(3) \quad \Delta\phi = 0 \quad (\text{in } \Omega)$$

$$(4) \quad \frac{\partial\phi}{\partial n} = g \quad (\text{on } \partial\Omega)$$

の解が存在するためには、 $\int_{\partial\Omega} g \, d\sigma = 0$ が必要かつ (ほぼ) 十分である。

$$(\text{必要性: } \int_{\partial\Omega} g \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \text{grad } \phi \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div grad } \phi \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \Delta\phi \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} 0 \, d\mathbf{x} = 0)$$

今の流れの問題では、この条件はつねに満たされる。実際、 $g = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ で、非圧縮 $\text{div } \mathbf{v} = 0$ を仮定しているので、Gauss の発散定理から

$$\int_{\partial\Omega} g \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_{\Omega} \text{div } \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} 0 \, d\mathbf{x} = 0.$$

解には定数差の自由度が残る (解 + 定数は解、2つの解の差は定数)。

3.10.3 まとめ

3次元で、非圧縮のポテンシャル流は、Laplace 方程式の Neumann 境界値問題を解くことで「解ける」ことが分かった。

2次元の場合も同様のことが成り立つが、実はより便利に、複素関数論が適用できる、という話を以下で紹介する。

(一方、2次元の Laplace 方程式の境界値問題は、複素関数論のあちこちで登場する。直接的に正則関数が登場しないが、複素関数論の項目の一つと考えるべきかもしれない。)

3.11 2次元流 3.11.1 渦度, 渦無しの流れ

速度場 \mathbf{v} が $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} u(x, y, t) \\ v(x, y, t) \\ 0 \end{pmatrix}$ の形をしているとき、流れは2次元の、**2次元流**であるという (このとき、 $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = 0$, \mathbf{v} の z 成分 = 0. 逆は必ずしも真ではない。)。

3.11 2次元流 3.11.1 渦度, 渦無しの流れ

速度場 \mathbf{v} が $\mathbf{v}(x, t) = \begin{pmatrix} u(x, y, t) \\ v(x, y, t) \\ 0 \end{pmatrix}$ の形をしているとき、流れは2次元の、**2次元流**であるという (このとき、 $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = 0$, \mathbf{v} の z 成分 = 0. 逆は必ずしも真ではない。)。

このとき渦度は

$$\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

そこで、2次元ベクトル場 $\mathbf{v}(x, y, t) = \begin{pmatrix} u(x, y, t) \\ v(x, y, t) \end{pmatrix}$ に対して、

$$\text{rot } \mathbf{v} := \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

と定め、これを \mathbf{v} の**渦度**と呼ぶことがある。この講義でも採用する。

3.11.1 渦度, 渦無しの流れ

2次元流についても、3次元流とほぼ同じことが成立する。

命題 6.1 (2次元流における渦なし流)

2次元の速度場 \mathbf{v} について

- ① \mathbf{v} のポテンシャルが存在すれば渦なし ($\text{rot } \mathbf{v} = 0$)。
- ② 渦なし ($\text{rot } \mathbf{v} = 0$) ならば、任意の単連結領域で \mathbf{v} のポテンシャルが存在する。
- ③ \mathbf{v} のポテンシャル ϕ が存在するとき、 $\Delta\phi = \text{div } \mathbf{v}$ 。特に非圧縮流ならば $\Delta\phi = 0$ 。

ただし $\text{rot } \mathbf{v} := \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ とする。

証明は3次元の場合と同じ。

3.11.2 非圧縮流と流れ関数 (1)

3.11.2 非圧縮流と流れ関数 (1)

2次元流の速度場 $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ に対して、

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = u$$

を満たす ψ が存在するとき、 ψ を \mathbf{v} の流れ関数 (stream function) と呼ぶ。

3.11.2 非圧縮流と流れ関数 (1)

2次元流の速度場 $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ に対して、

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = u$$

を満たす ψ が存在するとき、 ψ を \mathbf{v} の流れ関数 (stream function) と呼ぶ。

定義 6.2 (流線)

曲線が速度場 \mathbf{v} の流線 (stream line) とは、曲線上の各点で、曲線の接ベクトルが \mathbf{v} と平行であることをいう。

3.11.2 非圧縮流と流れ関数 (1)

2次元流の速度場 $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ に対して、

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = u$$

を満たす ψ が存在するとき、 ψ を \mathbf{v} の **流れ関数** (stream function) と呼ぶ。

定義 6.2 (流線)

曲線が速度場 \mathbf{v} の **流線** (stream line) とは、曲線上の各点で、曲線の接ベクトルが \mathbf{v} と平行であることをいう。

注意 流れ関数の等高線 ($\psi = \text{const.}$ で定まる曲線) のことを流線と定義することもあるが、ここでしたように、流線は流れ関数を用いずに定義することもできる。そうしておいて、流れ関数が存在する場合は、その等高線が流線になる、と論じることを選んだ。)

3.11 2次元流 非圧縮流と流れ関数 (2)

命題 6.3

流れ関数が存在するとき、その等高線は流線である。

3.11 2次元流 非圧縮流と流れ関数 (2)

命題 6.3

流れ関数が存在するとき、その等高線は流線である。

証明.

$\nabla\psi \cdot \mathbf{v} = \psi_x u + \psi_y v = -vu + uv = 0$ であるから $\nabla\psi \perp \mathbf{v}$. $\nabla\psi$ は流れ関数 ψ の等高線の法線ベクトルであるから、それが \mathbf{v} と直交することは、流れ関数の等高線の接線ベクトルが \mathbf{v} と平行であることを意味する。ゆえに流れ関数の等高線は流線である。 \square

3.11 2次元流 非圧縮流と流れ関数 (2)

命題 6.3

流れ関数が存在するとき、その等高線は流線である。

証明.

$\nabla\psi \cdot \mathbf{v} = \psi_x u + \psi_y v = -vu + uv = 0$ であるから $\nabla\psi \perp \mathbf{v}$. $\nabla\psi$ は流れ関数 ψ の等高線の法線ベクトルであるから、それが \mathbf{v} と直交することは、流れ関数の等高線の接線ベクトルが \mathbf{v} と平行であることを意味する。ゆえに流れ関数の等高線は流線である。 \square

より具体的に、 $\nabla\psi$ を $-\frac{\pi}{2}$ 回転すると \mathbf{v} に等しい。実際

$$\begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} \nabla\psi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_x \\ \psi_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_y \\ -\psi_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{v}.$$

3.11 2次元流 非圧縮流と流れ関数 (3)

命題 6.4 (非圧縮流と流れ関数)

2次元の速度場 \mathbf{v} について

- ① \mathbf{v} の流れ関数が存在すれば非圧縮 ($\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$)。
- ② 非圧縮 ($\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$) ならば、任意の単連結領域で \mathbf{v} の流れ関数が存在する。
- ③ \mathbf{v} の流れ関数 ψ が存在するとき、 $\Delta\psi = -\operatorname{rot} \mathbf{v}$. 特に渦なしならば $\Delta\psi = 0$.

ただし $\operatorname{rot} \mathbf{v} := \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ とする。

3.11 2次元流 非圧縮流と流れ関数 (3)

命題 6.4 (非圧縮流と流れ関数)

2次元の速度場 \mathbf{v} について

- ① \mathbf{v} の流れ関数が存在すれば非圧縮 ($\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$)。
- ② 非圧縮 ($\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$) ならば、任意の単連結領域で \mathbf{v} の流れ関数が存在する。
- ③ \mathbf{v} の流れ関数 ψ が存在するとき、 $\Delta\psi = -\operatorname{rot} \mathbf{v}$. 特に渦なしならば $\Delta\psi = 0$.

ただし $\operatorname{rot} \mathbf{v} := \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ とする。 既視感があるね。とにかく証明するけど。

3.11 2次元流 非圧縮流と流れ関数 (3)

命題 6.4 (非圧縮流と流れ関数)

2次元の速度場 \mathbf{v} について

- ① \mathbf{v} の流れ関数が存在すれば非圧縮 ($\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$)。
- ② 非圧縮 ($\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$) ならば、任意の単連結領域で \mathbf{v} の流れ関数が存在する。
- ③ \mathbf{v} の流れ関数 ψ が存在するとき、 $\Delta\psi = -\operatorname{rot} \mathbf{v}$. 特に渦なしならば $\Delta\psi = 0$.

ただし $\operatorname{rot} \mathbf{v} := \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ とする。 既視感があるね。とにかく証明するけど。

証明 (1) $\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0$.

(2) $\operatorname{rot} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}(-v) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ であるから、任意の単連結領域で $\psi(\mathbf{x}) := \int_{C_{\mathbf{x}}} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} \cdot d\mathbf{r}$ が well-defined であり、 $\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v$, $\frac{\partial \psi}{\partial y} = u$. ゆえに ψ は \mathbf{v} の流れ関数である。

(3) $\operatorname{rot} \mathbf{v} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\Delta\psi$.



3.11 2次元流 非圧縮流と流れ関数 (4) 流れ関数の意味

(流れ関数の意味を説明するが、最初に学ぶときは、とりあえず飛ばしても良い。)

考えている領域 Ω 内に定点 \mathbf{a} を選び、 \mathbf{a} から $\mathbf{x} \in \Omega$ に至る Ω 内の曲線 C_x を取ると、 $\psi(\mathbf{x}) := \int_{C_x} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} \cdot d\mathbf{r}$ が流れ関数となった。弧長パラメータ s を用いると、 $\mathbf{t} := \begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(s) \end{pmatrix}$ は単位接線ベクトルとなり

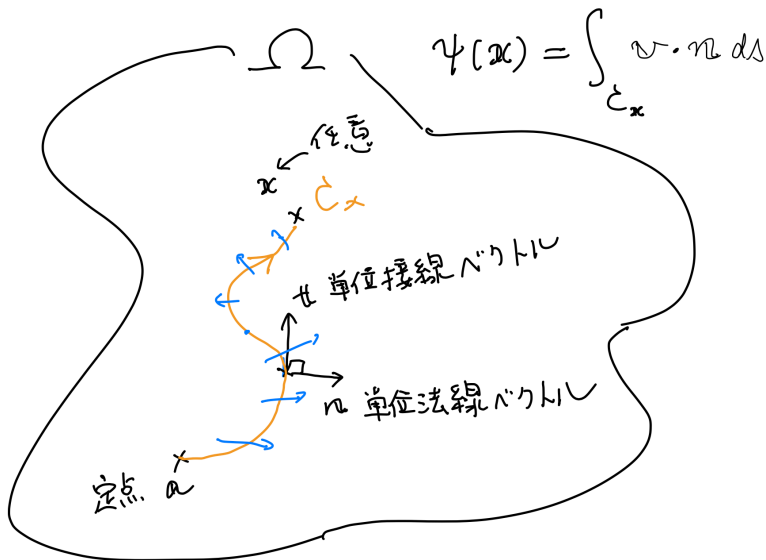
$$\psi(\mathbf{x}) = \int_{C_x} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_x} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} \cdot \mathbf{t} ds = \int_{C_x} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds.$$

ただし

$$\mathbf{n} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{t} = \begin{pmatrix} y'(s) \\ -x'(s) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

(\mathbf{n} は \mathbf{t} を $-\pi/2$ 回転したもので、単位法線ベクトルである。)

$\psi(\mathbf{x})$ はいわゆる**流束積分** (flux integral) である。すなわち、 C_x を横切り、 \mathbf{n} の側に単位時間に流れる流体の量 (2次元なので面積) である。



3.11 2次元流 非圧縮流と流れ関数 (4) 流れ関数の意味

複素測度ポテンシャル f が存在する場合は、流束積分は複素積分で計算できる:

$$(5) \quad \int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds = \operatorname{Im} \int_C f'(z) \, dz.$$

実際、

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds = -v \, dx + u \, dy = \psi_x dx + \psi_y dy,$$

$$\begin{aligned} f'(z) \, dz &= (\phi_x + i\psi_x)(dx + i \, dy) \\ &= (\phi_x dx - \psi_x dy) + i(\psi_x dx + \phi_x dy) \\ &= (\phi_x dx + \phi_y dy) + i(\psi_x dx + \psi_y dy) \end{aligned}$$

であるから

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds = \operatorname{Im} f'(z) \, dz.$$

3.11.3 単連結領域における 2次元非圧縮渦なし流 (1)

今日の議論を振り返る。3.12, 3.13 の定理を並べる。

3.11.3 単連結領域における2次元非圧縮渦なし流 (1)

今日の議論を振り返る。3.12, 3.13 の定理を並べる。

命題 6.5 (渦なし流と速度ポテンシャル)

2次元の速度場 \mathbf{v} について

- ① \mathbf{v} のポテンシャルが存在すれば渦なし ($\text{rot } \mathbf{v} = 0$)。
- ② 渦なし ($\text{rot } \mathbf{v} = 0$) ならば、任意の単連結領域で \mathbf{v} のポテンシャルが存在する。
- ③ \mathbf{v} のポテンシャル ϕ が存在するとき、 $\Delta\phi = \text{div } \mathbf{v}$ 。特に非圧縮流ならば $\Delta\phi = 0$ 。
ただし $\text{rot } \mathbf{v} := \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ とする。

命題 6.6 (非圧縮流と流れ関数)

2次元の速度場 \mathbf{v} について

- ① \mathbf{v} の流れ関数が存在すれば非圧縮 ($\text{div } \mathbf{v} = 0$)。
- ② 非圧縮 ($\text{div } \mathbf{v} = 0$) ならば、任意の単連結領域で \mathbf{v} の流れ関数が存在する。
- ③ \mathbf{v} の流れ関数 ψ が存在するとき、 $\Delta\psi = -\text{rot } \mathbf{v}$ 。特に渦なしならば $\Delta\psi = 0$ 。
ただし $\text{rot } \mathbf{v} := \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ とする。

3.11 単連結領域における2次元非圧縮渦なし流 (2) 関数論との関係

渦なし、非圧縮の両方を仮定するとどうなるか。ある ϕ, ψ が存在して

$$\nabla\phi = \begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{pmatrix} = \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \psi_y \\ -\psi_x \end{pmatrix}.$$

そして

$$\Delta\phi = \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \Delta\psi = -\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0.$$

このとき

$$f(x + iy) := \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

とおき、 f を \mathbf{v} の複素速度ポテンシャルと呼ぶ。

3.11 単連結領域における2次元非圧縮渦なし流 (2) 関数論との関係

渦なし、非圧縮の両方を仮定するとどうなるか。ある ϕ, ψ が存在して

$$\nabla\phi = \begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{pmatrix} = \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \psi_y \\ -\psi_x \end{pmatrix}.$$

そして

$$\Delta\phi = \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \Delta\psi = -\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0.$$

このとき

$$f(x + iy) := \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

とおき、 f を \mathbf{v} の複素速度ポテンシャルと呼ぶ。

実は f は正則関数である。実際

$$\phi_x = u = \psi_y, \quad \phi_y = v = -\psi_x$$

であるから、Cauchy-Riemann 方程式が成り立つ。また

$$f' = u - iv \quad (\text{微分すると速度が得られる}).$$

実際、 $f' = \phi_x + i\psi_x = u + i(-v) = u - iv$.

おまけ: ベクトル解析の復習 (1) grad, div, rot, Δ

$$\text{grad } f = \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

$$\text{div } \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u_j}{\partial x_j}.$$

$$\text{rot } \mathbf{u} = \text{curl } \mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

$$\Delta f = \nabla^2 f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}, \quad \Delta \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \Delta u_1 \\ \vdots \\ \Delta u_n \end{pmatrix}.$$

$$\int_V \text{div } \mathbf{u} \, dx = \int_{\partial V} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma \quad (\text{Gauss の発散定理}).$$

$$\text{rot grad} = \mathbf{0} \quad (\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}),$$

$$\text{div grad} = \Delta \quad (\nabla \cdot \nabla f = \Delta f),$$

$$\text{div rot} = 0 \quad (\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = 0),$$

$$\text{rot rot} = \text{grad div} - \Delta \quad (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \Delta \mathbf{u}).$$

方向微分係数の定義と合成関数の微分法から

$$\nabla f \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}.$$

おまけ: ベクトル解析の復習 (3) ポテンシャルの存在

命題 6.7 (ポテンシャルの存在定理)

\mathbb{R}^n の単連結領域 Ω におけるベクトル場 $\mathbf{f} = (f_i)$ が $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$

($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$) を満たすならば、 $F(\mathbf{x}) := \int_{C_{\mathbf{x}}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$ は $C_{\mathbf{x}}$ の取り方によらず well-defined であり、 $\nabla F = \mathbf{f}$ を満たす。ただし $C_{\mathbf{x}}$ は定点から \mathbf{x} に至る Ω 内の曲線である。

特に3次元ベクトル場 \mathbf{f} が $\text{rot } \mathbf{f} = \mathbf{0}$ を満たす場合、2次元ベクトル場 \mathbf{f} が $\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0$ を満たす場合、 \mathbf{f} はポテンシャルを持つ。

理解を深めるための注意を2つ

- 1変数関数の場合の $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$ に相当する。
- C^1 級のポテンシャル F が存在する場合、 $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}$, $\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}$ であるから、 $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ が成り立つことは明らかである。

入門部分のベクトル解析については、例えば桂田 [2] を見よ。

参考文献

- [1] 桂田祐史：複素関数と流体力学,
<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/intro-fluid.pdf>
(2015～).
- [2] 桂田祐史：多変数の微分積分学 2 講義ノート 第 2 部, <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu2/tahensuu2-p2.pdf> (内容はベクトル解析) (2006～).