

# 応用複素関数 第5回

## ～ 流体力学への応用 (1) ～

かつらだ まさし  
桂田 祐史

2021年5月18日

# 目次

- 1 連絡事項&本日の内容
- 2 流体力学への複素関数の応用
  - はじめに
  - 流体の運動の表現 何を求めれば良いか
  - 物質微分
  - 応力
  - 完全流体, 粘性流体, 非圧縮流体
  - 流体の運動方程式
  - 流体の境界条件
  - 静水圧の話  $p = -\rho g z + p_0$
  - 粘性率、動粘性率の具体値
- 3 おまけ: ベクトル解析の記号の復習
- 4 問の答え
- 5 参考文献

# 連絡事項 & 本日の内容

- 今回から、しばらく (3 回程度) 流体力学への応用の話をする。
- 今日は、流体力学で出て来る諸概念と、有名な方程式 (連続の方程式、非圧縮条件、Navier-Stokes 方程式、Euler 方程式、Stokes 方程式) の紹介をする (駆け足)。
- 次回以降、以下のものを使う可能性がある。
  - Mathematica  
Mac で動くかチェックすること。ライセンスが切れて動かない場合は、桂田に相談すること (アクティベーション・キーの再発行ができる)。
  - FreeFem++  
これについてはインストール方法を紹介する資料を準備し、授業で実演する。
  - C コンパイラー  
macOS をアップデートして C コンパイラーが動かなくなっている人が時々いる。その場合、Xcode またはコマンドラインツールの再インストールをする。

# 3 流体力学への複素関数の応用

## 3.1 はじめに

**流体 (fluid)** とは、液体、気体のように定まった形を持たず、「流れる」ものを理想化したものである。

(Cf. 質点, 質点系, 剛体, 弾性体, …)

- 流体のかかわる現象は非常に多く、応用上重要である。
- 流体は、圧縮性と粘性の有無で分類される。
- 流体の運動の決定については、数学的には解の存在・一意性すら未解決問題である。(ほとんどが非線形問題になり取り扱いが難しい。)

次のことが言える。

2次元の非圧縮流体の渦なしの流れ = 正則関数

この意味を理解して、その場合に应用できるようになることが、応用複素関数の(1つの)目標である。

## 3.1 はじめに (続き)

流体力学の定番本として、今井 [1], 巽 [2] をあげておく。関数論の応用については、今井 [3] がある。

必要な数学として、関数論、ベクトル解析、偏微分方程式の基本的な知識をあげておく (一応この授業で説明)。

## 3.2 流体の運動の表現 何を求めれば良いか

流体の状態は、ふつう次のものを求めることで定まる。ただし  $\mathbf{x} = (x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$  は位置,  $t$  は時刻を表す。

- 速度 (velocity)  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$   
( $\mathbf{v}$  の代わりに  $\mathbf{u}$  という字を使うことも多い。)
- 圧力 (pressure)  $p(\mathbf{x}, t)$
- 密度 (density)  $\rho(\mathbf{x}, t)$
- 温度 (temperature) 今回は考えない。

問 水と空気のおおよその密度は？ (この PDF の最後に答えがある。)

## 3.2 流体力学の方程式 (1) 連続の方程式

質量が保存されることから、一般に次式が成立する。これを**連続の方程式** (continuity equation) と呼ぶ。

$$(1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0.$$

**証明** (あらすじ) 流体内の任意の領域  $V$  にしめる流体の質量の時間変化率を考え、質量保存則から

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \int_V \rho \, d\mathbf{x} = - \int_{\partial V} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma.$$

ただし  $\mathbf{n}$  は  $\partial V$  の点における外向き単位法線ベクトルで、 $d\sigma$  は面積要素、 $\partial V$  は  $V$  の境界である。

(2) の右辺の意味や、次の Gauss の発散定理については、例えば桂田 [4] を見よ。

左辺に積分記号下の微分 (微分と積分の順序交換)、右辺に Gauss の発散定理を使うと

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\mathbf{x} = - \int_V \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \, d\mathbf{x}.$$

$V$  は任意であるから

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad \square$$

### 3.3 物質微分 (1) 定義

積の微分法から  $\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = \operatorname{grad} \rho \cdot \mathbf{v} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v}$  が成り立つので、連続の方程式は次のように書ける。

$$(3) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

**物質微分** (material derivative, Lagrange derivative) と呼ばれる作用素  $\frac{D}{Dt}$  を次式で定義する:

$$(4) \quad \frac{D}{Dt} := \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial t} + v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

これを使うと (3) は次のように表せる。

$$(5) \quad \frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$



### 3.3 物質微分 (2) 意味

流体の流れに沿って運動するある粒子の位置を  $\mathbf{x}(t)$  とする。すなわち

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}(t), t)$$

が成り立つ。このとき、任意の関数  $f(\mathbf{x}, t)$  に対して

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}f(\mathbf{x}(t), t) &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}(t), t)x'_j(t) + \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}(t), t) \\ &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}(t), t)v_j(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}(t), t) = \frac{Df}{Dt}\end{aligned}$$

が成り立つ。

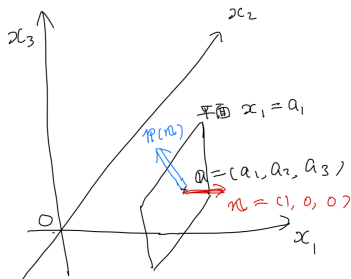
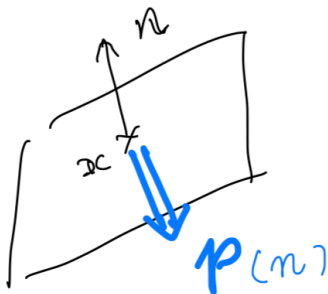
**注意** 流体粒子の速度は、位置  $\mathbf{x}$  と時刻  $t$  が分かれば  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  で与えられるが、その加速度は  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$  でなく、 $\frac{D\mathbf{v}}{Dt}$  である。よく考えてみよう。

## 3.4 応力 (1) Cauchy の応力原理, 応力の定義

流体の運動を考えるため、Cauchy は次の仮定をおいた。

流体が接触することで及ぼす力は面積に比例する。面積あたりの力は、位置  $x$ , 時刻  $t$ , 面の向き (普通は外向き単位法線ベクトル  $n$  で指定する) で定まる (**Cauchy の応力原理**)。

この面積あたりの力を**応力** (stress) と呼ぶ。



## 3.4 応力 (2) 応力テンソル

しばらく、 $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ ,  $t = \tau$  と固定し、応力  $\mathbf{p}$  を  $\mathbf{n}$  の関数と考える:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{n}).$$

点  $\mathbf{a}$  を通る平面  $x_i = a_i$  を通して、正の側が負の側におよびす力を  $\begin{pmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \\ p_{i3} \end{pmatrix}$  とおく。これは  $\mathbf{p}(\mathbf{e}_i)$  である。

$P := (p_{ij}) = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$  を応力テンソル (stress tensor) と呼ぶ。

次のことが成り立つ (証明は省略)。

- $P$  は対称である:  $P^T = P$  つまり  $p_{ij} = p_{ji}$ .
- $\mathbf{p}(\mathbf{n}) = P^T \mathbf{n}$ .

次式は覚えておくこと。

$$(6) \quad \mathbf{p}(\mathbf{n}) = P\mathbf{n}.$$

### 3.4 応力 (3) 応力テンソルの具体形

適当な仮定をおくと、応力テンソルの具体形が定まる。

Stokes (1819–1903) は、流体についての仮定を整理して **Stokes の流体公理** にまとめた (一様、等方、 $E = 0$  のとき  $P = -pI$  等々)。それから

$$P = \alpha I + \beta E + \gamma E^2$$

が導かれる。ここで  $I$  は単位テンソル、 $E$  は

$$(7) \quad E = (e_{ij}), \quad e_{ij} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

で定められ、**歪み (速度) テンソル** (strain rate tensor)、変形速度テンソルと呼ばれる。

さらに **Newton 流体の仮定** ( $P$  は  $E$  の 1 次式) をおくと、

$$(8) \quad P = (-p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v}) I + 2\mu E$$

を得る (岡本・中村 [5])。ここで  $\lambda, \mu$  は非負定数、 $p = p(x, t)$  はスカラー関数である。

## 3.5 完全流体, 粘性流体, 非圧縮流体 (1)

以下では、Newton 流体の仮定を満たす流体を考える。

$\mu$  は**粘性率** (粘性係数, 粘度, viscosity) と呼ばれる非負定数である。

- $\mu = 0$  である流体を**完全流体** (perfect fluid), あるいは**非粘性流体** (inviscid fluid) と呼ぶ。
- $\mu > 0$  である流体を**粘性流体** (viscous fluid) と呼ぶ。

一方、 $\frac{D\rho}{Dt} = 0$  を満たす流体を**非圧縮流体** と呼ぶ。一般に連続の方程式  $\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  が成り立つので、この条件は次の方程式と同値である。

$$(9) \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (\text{非圧縮条件の方程式})$$

非圧縮条件を満たす Newton 流体の応力テンソルは、次式を満たす。

$$(10) \quad P = -pl + 2\mu E.$$

## 3.5 完全流体, 粘性流体, 非圧縮流体 (2) 有名な場合

流体が静止している場合 ( $\mathbf{v} = 0$ ) や、完全流体 ( $\mu = 0$ ) においては ( $\mu E = 0$  であるので)

$$P = -pI = - \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}.$$

ゆえに

$$\mathbf{p}(\mathbf{n}) = P\mathbf{n} = -p\mathbf{n}.$$

応力は面に垂直 ( $\mathbf{p} \parallel \mathbf{n}$ )、押される向きで (外向き単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$  と逆向き)、大きさは  $p = p(\mathbf{x}, t)$  で  $\mathbf{n}$  にはよらない。

学校の理科で、止まっている水の力学として聞いたことがあるかもしれない。

## 3.6 流体の運動方程式 (1) 一般形

Cauchy の応力原理を認めると、一般に次の方程式が成立する。

$$(11) \quad \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{1}{\rho} \operatorname{div} P \quad (\text{流体の運動方程式}).$$

ただし

$$(12) \quad \operatorname{div} P := \begin{pmatrix} \frac{\partial p_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial p_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial p_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{33}}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (\text{行ごとに div})$$

**証明** 流体内の仮想的な領域  $V$  で運動方程式を立てると

$$\int_V \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} d\mathbf{x} = \int_{\partial V} P \mathbf{n} d\sigma.$$

右辺のベクトルの第  $i$  成分に Gauss の発散定理を用いると

$$\int_{\partial V} (p_{i1} n_1 + p_{i2} n_2 + p_{i3} n_3) d\sigma = \int_{\partial V} \begin{pmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \\ p_{i3} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_V \operatorname{div} \begin{pmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \\ p_{i3} \end{pmatrix} d\mathbf{x} = \int_V (\operatorname{div} P)_i d\mathbf{x}.$$

$$\text{ゆえに } \int_V \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} d\mathbf{x} = \int_V \operatorname{div} P d\mathbf{x}. \quad V \text{ は任意なので } \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \operatorname{div} P. \quad \square$$

## 3.6 流体の運動方程式 (2) $\operatorname{div} P$ を計算する

(既に述べたように) Newton 流体の公理を満たすとき

$$P = (-p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v})I + 2\mu E$$

が成り立つ。このとき  $\operatorname{div} P$  を計算すると

$$(13) \quad \operatorname{div} P = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}).$$

ただし

$$\Delta \mathbf{v} := \begin{pmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \\ \Delta v_3 \end{pmatrix}, \quad \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} \quad (\text{念のため}).$$

特に非圧縮流体では ( $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  であるから)

$$(14) \quad \operatorname{div} P = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v}.$$

これで準備はできた!



## 3.6 流体の運動方程式 (3) Navier-Stokes, Euler 方程式

非圧縮流体の運動方程式は次の形になる。

$$(15) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}.$$

これが非圧縮粘性流体の方程式として有名な<sup>ナヴィエ・ストークス</sup>**Navier-Stokes方程式**である。

ただし

$$(16) \quad \nu := \frac{\mu}{\rho}$$

とおいた。 $\nu$  を**動粘性率** (kinematic viscosity) と呼ぶ。

特に完全流体の場合は ( $\mu = 0$  であるから)

$$(17) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p.$$

これが非圧縮完全流体の方程式として有名な<sup>オイラー</sup>**Euler方程式**である。

## 3.6 流体の運動方程式 (4) Stokes 方程式

流速 ( $|\mathbf{v}|$ ) が小さいとき、Navier-Stokes 方程式で、 $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$  を無視して ( $\mathbf{v} = 0$  で線形化する、とも言える)

$$(18) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}.$$

を得る。これを **Stokes 方程式** と呼ぶ。粘性非圧縮流体の遅い流れの数学モデルとして採用される。

この他にも線形化したもの、圧縮性流体 (最近流行している) の場合など、色々あるが、運動方程式の話はこのくらいにしておく。

## 3.6 流体の運動方程式 (5) 練習の勧め

今日の授業は、ほとんどが単なるお話になってしまう嫌いがあると思われる。

- (13) を確かめよ (導関数を計算するだけだが、ベクトル解析の記号の良い練習である)。
- Navier-Stokes 方程式ベクトル表記でなく、成分表記せよ ( $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$  はどういうものか、一度は計算してみよう)。
- Navier-Stokes 方程式を覚えてみよう。

## 3.7 流体の境界条件 (1) 粘着境界条件

解を求めるための問題設定をするとき、初期値境界値問題とするのが普通である。境界条件について説明する。

粘性流体では、固体の壁では

$$(19) \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{wall}} \quad (\text{壁の表面において})$$

を満たすことが知られている ( $\mathbf{v}_{\text{wall}}$  は壁の速度)。特に固定壁では

$$(20) \quad \mathbf{v} = 0 \quad (\text{壁の表面において})$$

を満たす。これを**粘着境界条件**と呼ぶ。

数学的にはいわゆる Dirichlet 境界条件であり、扱いやすい。

## 3.7 流体の境界条件 (2) 滑り境界条件

一方

$$(21) \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{かつ} \quad \mathbf{p}(\mathbf{n}) \parallel \mathbf{n} \quad (\text{境界において})$$

を**すべり境界条件**と呼ぶ。速度の垂直成分が0 (壁に沿って動く) で、応力が境界に垂直 (壁に沿う成分が0) ということである。

計算するためには方程式で表現するのが望ましい。

$\mathbf{p}(\mathbf{n}) \parallel \mathbf{n}$  は、3次元では

$$P\mathbf{n} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$$

と表せる。また2次元流 (まだ説明していない) では、領域の境界曲線の単位接線ベクトルを  $\mathbf{t}$  として、次式で表せる。

$$P\mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = 0.$$

**注意** 非粘性流体では、流体のしめる領域内で  $P\mathbf{n} \parallel \mathbf{n}$  が成り立つ。  
 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$  が滑り境界条件である、とみなしている人が多い。

## 3.7 流体の境界条件 (3) その他

これ以外に、応力を指定する**応力境界条件**というものもあるが、それは必要になったときに説明する。

本日の話はここまで。以下のスライドはおまけです。

## 3.8 静水圧の話 $p = -\rho gz + p_0$

池 (水が静止している) の水圧を、Navier-Stokes 方程式を解いて調べよう。

一様な重力場を仮定する。  $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$  という単位質量あたりの外力を含めた

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f}$$

が運動方程式になる。  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  であるから  $\mathbf{0} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f}$ . 成分で書くと

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g.$$

水面を  $z = 0$  として、  $z = 0$  において、  $p = p_0 = \text{大気圧}$  とすると

$$p(\mathbf{x}) = -\rho gz + p_0.$$

1 m 深く潜った ( $z$  を 1 減らした) ときの、圧力の増加分  $\Delta p$  は

$$\Delta p = -\rho g(-1) = 1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \times 9.8 \text{ m/s}^2 \times 1 \text{ m} = 9.8 \times 10^3 \text{ Pa}.$$

大気圧  $p_0 = 1013 \text{ hPa} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$  であるから、  $\Delta p$  は大気圧  $p_0$  の 10% くらいである。だから 10 m 潜ったとき、  $\Delta p \doteq p_0$  となる訳である。

この問題は素朴な考え方で「解ける」ので、大げさな解き方のように思えるが、我々は導出した方程式をもとに考えようとしているので、無駄なことではない。

## 3.8 静水圧の話 アルキメデスの浮力の原理

一様な重力場の下での池あるいは湖 (水が静止している) に物体  $\Omega$  を入れたとき、物体の表面は水から応力を受ける。その“合力”を求めよう。

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{p}(\mathbf{n}) d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} P \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho g \end{pmatrix} d\mathbf{x} = \rho g \int_{\Omega} d\mathbf{x} \, \mathbf{e}_3 = \rho |\Omega| g \mathbf{e}_3.$$

ただし

$$\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\Omega| = \Omega \text{ の体積.}$$

$\rho |\Omega|$  は「物体が押しのける水の質量」で、 $\rho |\Omega| g$  はその重さ (重力) である。つまり向きが上向き ( $\mathbf{e}_3$ ) で、大きさが「物体が押しのける水の重さ」である力となる。これが**浮力**である。



## 3.9 粘性率、動粘性率の具体値

粘性率、動粘性率は、粘性の大きさを表す量であるが、わかりにくい。身近な流体の場合にどういう値を取るかくらい調べておこう。

**問** 水や空気では、粘性率、動粘性率はどういう値を取るか。温度は 20 度とする。

**答** 水の場合

$$\mu = 1.005 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}, \quad \nu = 1.0 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}.$$

空気の場合

$$\mu = 1.83 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}, \quad \nu = 1.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}. \quad \square$$

私は特に根拠なく、水の方が大きそうに思っていた。 $\mu$  については確かにそうだが、 $\nu$  については逆転している (水の  $\rho$  が 3 桁大きいのが効いている)。

なお、サラダ油は水の 60 ~ 80 倍程度であるという。

温度が上がると  $\mu$  は小さくなる。

気体の場合は、 $\mu$  は圧力にはほとんどよらない。

## おまけ: ベクトル解析の記号の復習

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u_j}{\partial x_j}.$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = \operatorname{curl} \mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

$$\Delta f = \nabla^2 f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}.$$

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx = \int_{\partial V} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma \quad (\text{Gauss の発散定理}).$$

**問** 水と空気のおおよその密度は？

**解答** 水は 1 ml で 1 g とすれば、 $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$  である。

空気については、高校の化学の知識で、1 mol は 22.4 l であること、80% が窒素 (分子量 28)、20% が酸素 (分子量 32) であることを用いると、 $\rho = 1.3 \text{ kg/m}^3$  となる。

# 参考文献

- [1] 今井功：流体力学 前編, 裳華房 (1973), 後編は書かれなかった。
- [2] たつみともまさ 巽 友正：流体力学, 培風館 (1982).
- [3] 今井功：複素解析と流体力学, 日本評論社 (1981/10/20, 1989/4/1).
- [4] 桂田祐史：多変数の微分積分学 2 講義ノート 第 2 部, <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu2/tahensuu2-p2.pdf> (内容はベクトル解析) (2006~).
- [5] 岡本久, 中村周：関数解析, 岩波書店 (2006/1/26, 2016/11/10 (POD 版)), 岩波講座現代数学の基礎 (1996~1999) の分冊を単行本化したもの.