応用複素関数 第 4 回

～ Riemann 球面と 1 次分数変換 (2) ～

かつらだ まさし
桂田 祐史

2021 年 5 月 11 日

目次

1. 連絡事項
2. Riemann 球面と 1 次分数変換
   - Riemann 球面の幾何学的イメージ
   - Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ への位相の導入
   - 1 次分数変換は $\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への同相写像である
   - Riemann 球面は Riemann 面である
   - 1 次分数変換の鏡像の原理
   - 1 次分数変換による領域の等角写像
3. 参考文献

連絡事項

連絡事項

- COVID19 流行に伴い発令された緊急事態宣言の延長が決まりました。変異株の増加に伴い、これまでとは異なった病気であると考える (自分の行動を見直す) べきのようです。この講義の授業形態はもともとオンデマンド型と決まっているので、特に何か変更になるわけではありませんが、みなさんくれぐれも注意して過ごして下さい。

連絡事項

- COVID19 流行に伴い発令された緊急事態宣言の延長が決まりました。変異株の増加に伴い、これまでとは異なった病気であると考える (自分の行動を見直す) べきのようです。この講義の授業形態はもともとオンデマンド型と決まっているので、特に何か変更になるわけではありませんが、みなさんくれぐれも注意して過ごして下さい。
- 今回は、Riemann 球面と 1 次分数変換 (桂田 [1] の §3 の内容) の 2 回目です。

  トポロジーについての予備知識がないと分かりにくい (かもしれない) ところがありますが、あえて紹介しました。その部分は「そういうものか」くらいに流してもらって結構です。

連絡事項

- COVID19 流行に伴い発令された緊急事態宣言の延長が決まりました。変異株の増加に伴い、これまでとは異なった病気であると考える (自分の行動を見直す) べきのようです。この講義の授業形態はもともとオンデマンド型と決まっているので、特に何か変更になるわけではありませんが、みなさんくれぐれも注意して過ごして下さい。
- 今回は、Riemann 球面と 1 次分数変換 (桂田 [1] の §3 の内容) の 2 回目です。

  トポロジーについての予備知識がないと分かりにくい (かもしれない) ところがありますが、あえて紹介しました。その部分は「そういうものか」くらいに流してもらって結構です。
- 次回からは、しばらく関数論の流体力学への応用の話をする予定です (資料は [1] とは別のものを提供します)。Mathematica を使うので、起動するかどうかチェックしておいて下さい。もし起動できなくなっている場合、アクティベーション・キーの再発行が必要かもしれません。そのような状況になった場合、気軽に相談して下さい。
- 私は現在 (5/10) 風邪症状があります。火曜 11:30–12:30 は Zoom で質問を受け付けることにしていますが、5 月 11 日 (火) はお休みさせて下さい。

2.6 Riemann 球面の幾何学的イメージ (1) 立体射影

なぜ $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を Riemann 球面と呼ぶか。

2.6 Riemann 球面の幾何学的イメージ (1) 立体射影

なぜ $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を Riemann 球面と呼ぶか。　$\widehat{\mathbb{C}}$ は $\mathbb{R}^3$ の球面と同一視できるから。

2.6 Riemann 球面の幾何学的イメージ (1) 立体射影

なぜ $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を Riemann 球面と呼ぶか。 $\widehat{\mathbb{C}}$ は $\mathbb{R}^3$ の球面と同一視できるから。

$$S := \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \right\}, \quad N := (0, 0, 1)$$

とおく。また $x_1 x_2$ 平面 $x_3 = 0$ を H で表し、複素平面 $\mathbb{C}$ と同一視する。すなわち $(x_1, x_2, 0) \in H$ に $x_1 + i x_2 \in \mathbb{C}$ を対応させる。

2.6 Riemann 球面の幾何学的イメージ (1) 立体射影

なぜ $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を Riemann 球面と呼ぶか。　$\widehat{\mathbb{C}}$ は $\mathbb{R}^3$ の球面と同一視できるから。

$$S := \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\}, \quad N := (0, 0, 1)$$

とおく。また x_1x_2 平面 $x_3 = 0$ を H で表し、複素平面 $\mathbb{C}$ と同一視する。すなわち $(x_1, x_2, 0) \in H$ に $x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}$ を対応させる。

任意の $P \in S \setminus \{N\}$ に対して、N と P を通る直線と、平面 H との交点 P' がただ一つ定まる。P に P' を対応させる写像

$$\varphi \colon S \setminus \{N\} \ni P \longmapsto P' \in H = \mathbb{C}$$

を、N からの**立体射影 (stereographic projection)** と呼ぶ。

2.6 Riemann 球面の幾何学的イメージ (1) 立体射影

なぜ $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を Riemann 球面と呼ぶか。 $\widehat{\mathbb{C}}$ は $\mathbb{R}^3$ の球面と同一視できるから。

$$S := \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\}, \quad N := (0, 0, 1)$$

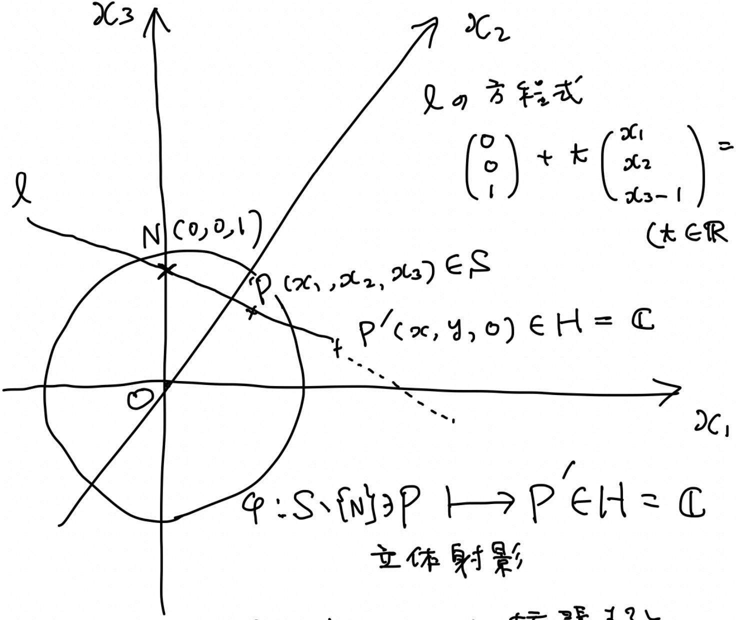
とおく。また x_1x_2 平面 $x_3 = 0$ を H で表し、複素平面 $\mathbb{C}$ と同一視する。すなわち $(x_1, x_2, 0) \in H$ に $x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}$ を対応させる。

任意の $P \in S \setminus \{N\}$ に対して、N と P を通る直線と、平面 H との交点 P' がただ一つ定まる。P に P' を対応させる写像

$$\varphi\colon S \setminus \{N\} \ni P \longmapsto P' \in H = \mathbb{C}$$

を、N からの**立体射影** (**stereographic projection**) と呼ぶ。

注 以下で、$\varphi(N) = \infty$ と定めることで、φ を S から $\widehat{\mathbb{C}}$ への写像に拡張する。その拡張した写像も**立体射影**と呼ばれる。



lの方程式

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(t \in \mathbb{R})$

$$\varphi : S \setminus \{N\} \ni P \longmapsto P' \in H = \mathbb{C}$$

立体射影

$\varphi(N) = \infty$ と拡張すると

$$\varphi : S \to \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \hat{\mathbb{C}}$$

2.6 Riemann 球面の幾何学的イメージ (2) 立体射影の式

問 $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x + iy = (x, y, 0)$ とするとき、次式を示せ。

$$x = \frac{x_1}{1 - x_3}, \quad y = \frac{x_2}{1 - x_3} \quad \text{すなわち} \quad \varphi(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}.$$

(ヒント: 2 点 N, P を通る直線と、平面 $x_3 = 0$ との交点を求める。)

問 $\forall z \in \mathbb{C}$ に対して、$z = \varphi(x_1, x_2, x_3)$ は次のように解けることを示せ。

$$x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}, \quad x_1 = \frac{z + \overline{z}}{|z|^2 + 1}, \quad x_2 = \frac{-i(z - \overline{z})}{|z|^2 + 1}.$$

(ヒント: $|z|^2 = \dfrac{1 + x_3}{1 - x_3}$ を導出した後、x_3, x_1, x_2 の順に求める。)

(逆写像が存在するので)

立体射影 $\varphi\colon S \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$ は全単射である。

$\lim_{P\to N}\varphi(P)=\infty$ である (幾何的直観でも明らか、式で示すのも簡単)。

2.6 Riemann 球面の幾何学的イメージ (3) S と $\widehat{\mathbb{C}}$ の同一視

$\displaystyle\lim_{P\to N}\varphi(P)=\infty$ である (幾何的直観でも明らか、式で示すのも簡単)。
そこで北極 N に対して ∞ を対応させることで、球面 S から $\widehat{\mathbb{C}}$ への全単射な拡張が得られる。それを同じ φ で表す:

$$\varphi(x_1,x_2,x_3)=\begin{cases}\dfrac{x_1+ix_2}{1-x_3} & ((x_1,x_2,x_3)\in S\setminus\{N\})\\ \infty & ((x_1,x_2,x_3)=N=(0,0,1)).\end{cases}$$

元々は、S のことを Riemann 球面と呼び、φ によって $\widehat{\mathbb{C}}$ を S と同一視することで、$\widehat{\mathbb{C}}$ のことも Riemann 球面と呼ぶようになった。

$\displaystyle\lim_{P\to N}\varphi(P)=\infty$ である (幾何的直観でも明らか、式で示すのも簡単)。そこで北極 N に対して ∞ を対応させることで、球面 S から $\hat{\mathbb{C}}$ への全単射な拡張が得られる。それを同じ φ で表す:

$$\varphi(x_1,x_2,x_3)=\begin{cases}\dfrac{x_1+ix_2}{1-x_3} & ((x_1,x_2,x_3)\in S\setminus\{N\})\\ \infty & ((x_1,x_2,x_3)=N=(0,0,1)).\end{cases}$$

元々は、S のことを Riemann 球面と呼び、φ によって $\hat{\mathbb{C}}$ を S と同一視することで、$\hat{\mathbb{C}}$ のことも Riemann 球面と呼ぶようになった。

問 次のことを確かめよ (幾何学的考察および計算の両方で)。

$$\varphi(\text{北半球})=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|>1\},\quad \varphi(\text{南半球})=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1\},$$
$$\varphi(\text{赤道})=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\},$$
$$\varphi(\text{北極})=\infty,\quad \varphi(\text{南極})=0.$$

2.7 Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ への位相の導入 (1)

点列の極限、関数の極限・連続性を定義するには、**位相**と呼ばれる構造 (開集合族) が必要になる。

2.7 Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ への位相の導入 (1)

点列の極限、関数の極限・連続性を定義するには、**位相**と呼ばれる構造 (開集合族) が必要になる。

$\hat{\mathbb{C}}$ への位相の導入方法を 2 つ、駆け足 (証明は抜きで) で紹介する。どちらの方法でも同じ位相が得られる。

2.7 Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ への位相の導入 (1)

点列の極限、関数の極限・連続性を定義するには、**位相**と呼ばれる構造 (開集合族) が必要になる。

$\widehat{\mathbb{C}}$ への位相の導入方法を 2 つ、駆け足 (証明は抜きで) で紹介する。どちらの方法でも同じ位相が得られる。

$\widehat{\mathbb{C}}$ への位相の導入 方法 1 一般に距離空間は位相空間となる (距離を用いて球を定義し、それから開集合を定義する)。$z_1, z_2 \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して

$$d(z_1, z_2) := \left\|\varphi^{-1}(z_1) - \varphi^{-1}(z_2)\right\| \quad (\|\ \| \text{ は } \mathbb{R}^3 \text{ のノルム})$$

とおくと、d は $\widehat{\mathbb{C}}$ 上の距離となる (これは簡単に確認できる)。

点列の極限、関数の極限・連続性を定義するには、**位相**と呼ばれる構造 (開集合族) が必要になる。

$\widehat{\mathbb{C}}$ への位相の導入方法を 2 つ、駆け足 (証明は抜きで) で紹介する。どちらの方法でも同じ位相が得られる。

$\widehat{\mathbb{C}}$ への位相の導入 方法 1　一般に距離空間は位相空間となる (距離を用いて球を定義し、それから開集合を定義する)。$z_1, z_2 \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して

$$d(z_1, z_2) := \left\| \varphi^{-1}(z_1) - \varphi^{-1}(z_2) \right\| \quad (\|\ \| \text{ は } \mathbb{R}^3 \text{ のノルム})$$

とおくと、d は $\widehat{\mathbb{C}}$ 上の距離となる (これは簡単に確認できる)。

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ のとき

$$d(z_1, z_2) = \frac{2\,|z_1 - z_2|}{\sqrt{\left(1 + |z_1|^2\right)\left(1 + |z_2|^2\right)}}.$$

図形イメージは鮮明だけれど、式はちょっと面倒 (個人の感想です)。

2.7 Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ への位相の導入 (2)

$\widehat{\mathbb{C}}$ への位相の導入 方法 2 (一見ごちゃごちゃしているけれどオススメ)

位相を定めるには、開集合を定義する以外に、各点の**基本近傍系**を定める、というやり方がある。超駆け足で説明する。

$\widehat{\mathbb{C}}$ への位相の導入 方法 2　(一見ごちゃごちゃしているけれどオススメ)

位相を定めるには、開集合を定義する以外に、各点の**基本近傍系**を定める、というやり方がある。超駆け足で説明する。

X は空でない集合とし、 X の各点 x に対して、X の部分集合族 $\mathcal{B}(x)$ が定まっていて、以下の条件 (**基本近傍系の公理**) を満たすとする。

1. $(\forall x\in X)\ \mathcal{B}(x)\neq\emptyset$. さらに $(\forall x\in X)\ (\forall U\in\mathcal{B}(x))\ x\in U$.
2. $(\forall x\in X)\ (\forall U,V\in\mathcal{B}(x))\ (\exists W\in\mathcal{B}(x))\ W\subset U\cap V$.
3. $(\forall x\in X)(\forall U\in\mathcal{B}(x))\ (\exists W\in\mathcal{B}(x))\ (\forall y\in W)\ (\exists U_y\in\mathcal{B}(y))\ U_y\subset U$.

このとき、X の部分集合 Ω について

$$\Omega \text{ は開集合} \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad (\forall x\in\Omega)(\exists U\in\mathcal{B}(x))\quad U\subset\Omega$$

と定義すると、開集合の全体は**位相の公理**を満たす (位相空間のテキストを見よ)。

$\widehat{\mathbb{C}}$ への位相の導入 方法 2 (一見ごちゃごちゃしているけれどオススメ)

位相を定めるには、開集合を定義する以外に、各点の**基本近傍系**を定める、というやり方がある。超駆け足で説明する。

X は空でない集合とし、 X の各点 x に対して、X の部分集合族 $\mathcal{B}(x)$ が定まっていて、以下の条件 (**基本近傍系の公理**) を満たすとする。

1. $(\forall x \in X)\ \mathcal{B}(x) \neq \emptyset$. さらに $(\forall x \in X)\ (\forall U \in \mathcal{B}(x))\ x \in U$.
2. $(\forall x \in X)\ (\forall U, V \in \mathcal{B}(x))\ (\exists W \in \mathcal{B}(x))\ W \subset U \cap V$.
3. $(\forall x \in X)(\forall U \in \mathcal{B}(x))\ (\exists W \in \mathcal{B}(x))\ (\forall y \in W)\ (\exists U_y \in \mathcal{B}(y))\ U_y \subset U$.

このとき、X の部分集合 Ω について

$$\Omega \text{ は開集合} \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad (\forall x \in \Omega)(\exists U \in \mathcal{B}(x)) \quad U \subset \Omega$$

と定義すると、開集合の全体は**位相の公理**を満たす (位相空間のテキストを見よ)。

$\mathbb{C}$ においては、各 $a \in \mathbb{C}$ に対して、

$$\mathcal{B}(a) := \{U(a;r) \mid r > 0\}, \quad U(a;r) := D(a;r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < r\}$$

と定めると基本近傍系の公理が満たされ、それが定める位相は、通常の $\mathbb{C}$ の位相である。

$\hat{\mathbb{C}}$ への位相の導入 方法 2 (一見ごちゃごちゃしているけれどオススメ)

位相を定めるには、開集合を定義する以外に、各点の**基本近傍系**を定める、というやり方がある。超駆け足で説明する。

X は空でない集合とし、 X の各点 x に対して、X の部分集合族 $\mathcal{B}(x)$ が定まっていて、以下の条件 (**基本近傍系の公理**) を満たすとする。

1. $(\forall x \in X)\ \mathcal{B}(x) \neq \emptyset$. さらに $(\forall x \in X)\ (\forall U \in \mathcal{B}(x))\ x \in U$.
2. $(\forall x \in X)\ (\forall U, V \in \mathcal{B}(x))\ (\exists W \in \mathcal{B}(x))\ W \subset U \cap V$.
3. $(\forall x \in X)(\forall U \in \mathcal{B}(x))\ (\exists W \in \mathcal{B}(x))\ (\forall y \in W)\ (\exists U_y \in \mathcal{B}(y))\ U_y \subset U$.

このとき、X の部分集合 Ω について

$$\Omega \text{ は開集合} \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad (\forall x \in \Omega)(\exists U \in \mathcal{B}(x)) \quad U \subset \Omega$$

と定義すると、開集合の全体は**位相の公理**を満たす (位相空間のテキストを見よ)。

$\mathbb{C}$ においては、各 $a \in \mathbb{C}$ に対して、

$$\mathcal{B}(a) := \{U(a;r) \mid r > 0\}, \quad U(a;r) := D(a;r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < r\}$$

と定めると基本近傍系の公理が満たされ、それが定める位相は、通常の $\mathbb{C}$ の位相である。

新たに $\mathcal{B}(\infty)$ を定めて、$\mathcal{B}(a)$ $(a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\})$ が基本近傍系の公理を満たすことを確認すれば、$\hat{\mathbb{C}}$ の位相が定義できる。

$$\mathcal{B}(\infty) := \{U(\infty;R) \mid R \in (0,+\infty)\}, \quad U(\infty;R) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\} \cup \{\infty\}.$$

2.8 1 次分数変換は $\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への同相写像である

既に 1 次分数変換 φ は、$\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への全単射であり、逆写像も 1 次分数変換であること、任意の $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して $\lim_{z \to a} \varphi(z) = \varphi(a)$ が成り立つことは説明してある。

2.8 1次分数変換は $\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への同相写像である

既に1次分数変換 φ は、$\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への全単射であり、逆写像も1次分数変換であること、任意の $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して $\lim_{z \to a} \varphi(z) = \varphi(a)$ が成り立つことは説明してある。

$\widehat{\mathbb{C}}$ に位相が定義できることが分かった (お話のみ)。実は lim はその位相についての収束であることも分かる (方法 (2) で考えると簡単)。従って、φ も φ^{-1} も、$\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への連続写像である。

2.8 1次分数変換は $\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への同相写像である

既に1次分数変換 φ は、$\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への全単射であり、逆写像も1次分数変換であること、任意の $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して $\lim_{z \to a} \varphi(z) = \varphi(a)$ が成り立つことは説明してある。

$\widehat{\mathbb{C}}$ に位相が定義できることが分かった (お話のみ)。実は lim はその位相についての収束であることも分かる (方法 (2) で考えると簡単)。従って、φ も φ^{-1} も、$\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への連続写像である。

一般に写像 $\varphi\colon X \to Y$ が全単射であり、φ と φ^{-1} が共に連続であるとき、φ は**同相写像** (homeomorphism) であるといい、X と Y は**同相**であるという。

2.8 1次分数変換は$\widehat{\mathbb{C}}$から$\widehat{\mathbb{C}}$への同相写像である

既に1次分数変換 φ は、$\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への全単射であり、逆写像も1次分数変換であること、任意の $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して $\lim_{z\to a} \varphi(z) = \varphi(a)$ が成り立つことは説明してある。

$\widehat{\mathbb{C}}$ に位相が定義できることが分かった (お話のみ)。実は lim はその位相についての収束であることも分かる (方法 (2) で考えると簡単)。従って、φ も φ^{-1} も、$\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への連続写像である。

一般に写像 $\varphi\colon X \to Y$ が全単射であり、φ と φ^{-1} が共に連続であるとき、φ は**同相写像** (homeomorphism) であるといい、X と Y は**同相**であるという。

分かったことは次のように簡潔にまとめられる。

1次分数変換は $\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への同相写像である。

既に1次分数変換 φ は、$\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への全単射であり、逆写像も1次分数変換であること、任意の $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して $\lim_{z\to a} \varphi(z) = \varphi(a)$ が成り立つことは説明してある。

$\widehat{\mathbb{C}}$ に位相が定義できることが分かった (お話のみ)。実は lim はその位相についての収束であることも分かる (方法 (2) で考えると簡単)。従って、φ も φ^{-1} も、$\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への連続写像である。

一般に写像 $\varphi\colon X \to Y$ が全単射であり、φ と φ^{-1} が共に連続であるとき、φ は**同相写像** (homeomorphism) であるといい、X と Y は**同相**であるという。
分かったことは次のように簡潔にまとめられる。

1次分数変換は $\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への同相写像である。

実は、$\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への同相写像は1次分数変換に限る。
$\to$ 1次分数変換の重要性が分かる。

(このことの証明も、期末レポート課題の候補問題とする。)

2.9 Riemann 球面は Riemann 面である

(このスライドは、ただのお話です。キーワード紹介程度に考えて下さい。)

曲線、曲面の概念を一般化した概念に**多様体**(たようたい) (manifold) というものがあり、現代の数学では基本的とされている。

2.9 Riemann 球面は Riemann 面である

(このスライドは、ただのお話です。キーワード紹介程度に考えて下さい。)

曲線、曲面の概念を一般化した概念に**多様体**(たようたい) (manifold) というものがあり、現代の数学では基本的とされている。

おおざっぱに言うと、多様体とは、局所的には $\mathbb{R}^n$ または $\mathbb{C}^n$ の円盤とみなせるような、位相空間のことである。

2.9 Riemann 球面は Riemann 面である

(このスライドは、ただのお話です。キーワード紹介程度に考えて下さい。)

曲線、曲面の概念を一般化した概念に**多様体**(たようたい) (manifold) というものがあり、現代の数学では基本的とされている。

おおざっぱに言うと、多様体とは、局所的には $\mathbb{R}^n$ または $\mathbb{C}^n$ の円盤とみなせるような、位相空間のことである。

特に、局所的に $\mathbb{C}$ の円盤とみなせるようなもの (1 次元の複素多様体) を **Riemann 面**とよぶ。

2.9 Riemann 球面は Riemann 面である

(このスライドは、ただのお話です。キーワード紹介程度に考えて下さい。)

曲線、曲面の概念を一般化した概念に**多様体**(たようたい) (manifold) というものがあり、現代の数学では基本的とされている。

おおざっぱに言うと、多様体とは、局所的には $\mathbb{R}^n$ または $\mathbb{C}^n$ の円盤とみなせるような、位相空間のことである。

特に、局所的に $\mathbb{C}$ の円盤とみなせるようなもの (1 次元の複素多様体) を **Riemann 面**とよぶ。

$\mathbb{C}$ 自身や、$\mathbb{C}$ の開集合は Riemann 面であるが、Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ も Riemann 面である。実際、$a \in \mathbb{C}$ の近傍 $U(a; r) = D(a; r)$ はそのまま $\mathbb{C}$ の円盤であるし、∞ の近傍 $U(\infty; R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\} \cup \{\infty\}$ は $w = \frac{1}{z}$ により $\mathbb{C}$ の円盤 $\{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1/R\}$ に写る。

2.9 Riemann 球面は Riemann 面である

(このスライドは、ただのお話です。キーワード紹介程度に考えて下さい。)

曲線、曲面の概念を一般化した概念に**多様体**(たようたい) (manifold) というものがあり、現代の数学では基本的とされている。

おおざっぱに言うと、多様体とは、局所的には $\mathbb{R}^n$ または $\mathbb{C}^n$ の円盤とみなせるような、位相空間のことである。

特に、局所的に $\mathbb{C}$ の円盤とみなせるようなもの (1 次元の複素多様体) を **Riemann 面**とよぶ。

$\mathbb{C}$ 自身や、$\mathbb{C}$ の開集合は Riemann 面であるが、Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ も Riemann 面である。実際、$a \in \mathbb{C}$ の近傍 $U(a; r) = D(a; r)$ はそのまま $\mathbb{C}$ の円盤であるし、∞ の近傍 $U(\infty; R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\} \cup \{\infty\}$ は $w = \frac{1}{z}$ により $\mathbb{C}$ の円盤 $\{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1/R\}$ に写る。

この座標変換 $w = 1/z$ により、$z = \infty$ においても、関数の微分可能性や留数を考えたりできる。($F(w) = f(1/w)$ が $w = 0$ で微分できるとき、f は ∞ で微分可能という等。) これは実はよく使われる。

2.10 1 次分数変換の鏡像の原理 (1) 鏡像の位置

$\widehat{\mathbb{C}}$ の円は 1 次分数変換で $\widehat{\mathbb{C}}$ の円に写ることを示したが、円上にない点についても、注目すべき性質が成り立つ。

2.10 1 次分数変換の鏡像の原理 (1) 鏡像の位置

$\widehat{\mathbb{C}}$ の円は 1 次分数変換で $\widehat{\mathbb{C}}$ の円に写ることを示したが、円上にない点についても、注目すべき性質が成り立つ。

定義 4.1 (円に関して鏡像の位置)

C は $\widehat{\mathbb{C}}$ の円であり、$z, z' \in \widehat{\mathbb{C}}$ とする。z と z' が C に関して互いに**鏡像の位置**にある (z と z' が C に関して対称である) とは，次の (a), (b) のいずれかが成り立つことをいう。

(a) C が $\mathbb{C}$ の直線であり、z と z' が C に関して対称の位置にある。

(b) C が $\mathbb{C}$ の円であり、z と z' が円 C の中心 c から発する一本の半直線上にあって、しかも $|z-c||z'-c| = r^2$ (r は円 C の半径) を満たす。円の中心 c と ∞ とはその円に関して鏡像の位置にあるとする。

2.10 1次分数変換の鏡像の原理 (1) 鏡像の位置

$\widehat{\mathbb{C}}$ の円は1次分数変換で $\widehat{\mathbb{C}}$ の円に写ることを示したが、円上にない点についても、注目すべき性質が成り立つ。

定義 4.1 (円に関して鏡像の位置)

C は $\widehat{\mathbb{C}}$ の円であり、$z, z' \in \widehat{\mathbb{C}}$ とする。z と z' が C に関して互いに**鏡像の位置**にある (z と z' が C に関して対称である) とは，次の (a), (b) のいずれかが成り立つことをいう。

- (a) C が $\mathbb{C}$ の直線であり、z と z' が C に関して対称の位置にある。
- (b) C が $\mathbb{C}$ の円であり、z と z' が円 C の中心 c から発する一本の半直線上にあって、しかも $|z-c||z'-c| = r^2$ (r は円 C の半径) を満たす。円の中心 c と ∞ とはその円に関して鏡像の位置にあるとする。

2.10 1 次分数変換の鏡像の原理 (2) 鏡像の原理

命題 4.2 (1 次分数変換の鏡像の原理)

C は $\widehat{\mathbb{C}}$ の円、z と z' は C に関して互いに鏡像の位置にある 2 点、f は 1 次分数変換とするとき、$f(z)$ と $f(z')$ は $f(C)$ に関して互いに鏡像の位置にある。

命題 4.2 (1次分数変換の鏡像の原理)

C は $\widehat{\mathbb{C}}$ の円、z と z' は C に関して互いに鏡像の位置にある 2 点、f は 1 次分数変換とするとき、$f(z)$ と $f(z')$ は $f(C)$ に関して互いに鏡像の位置にある。

証明のあらすじ　色々な方法があるが、素朴な計算で証明してみよう。f が平行移動 $T_d(z)=z+d$, 定数倍 $M_a(z)=az$ $(a\neq 0)$, 反転 $R(z)=\frac{1}{z}$ について確かめれば良い (任意の 1 次分数変換は、それらの合成として表せるから)。

命題 4.2 (1 次分数変換の鏡像の原理)

C は $\widehat{\mathbb{C}}$ の円、z と z' は C に関して互いに鏡像の位置にある 2 点、f は 1 次分数変換とするとき、$f(z)$ と $f(z')$ は $f(C)$ に関して互いに鏡像の位置にある。

証明のあらすじ　色々な方法があるが、素朴な計算で証明してみよう。f が平行移動 $T_d(z)=z+d$, 定数倍 $M_a(z)=az$ $(a\neq 0)$, 反転 $R(z)=\frac{1}{z}$ について確かめれば良い (任意の 1 次分数変換は、それらの合成として表せるから)。

平行移動、定数倍については直観的にも明らかであろう。

命題 4.2 (1 次分数変換の鏡像の原理)

C は $\widehat{\mathbb{C}}$ の円、z と z' は C に関して互いに鏡像の位置にある 2 点、f は 1 次分数変換とするとき、$f(z)$ と $f(z')$ は $f(C)$ に関して互いに鏡像の位置にある。

証明のあらすじ　色々な方法があるが、素朴な計算で証明してみよう。f が平行移動 $T_d(z)=z+d$, 定数倍 $M_a(z)=az$ $(a\neq 0)$, 反転 $R(z)=\frac{1}{z}$ について確かめれば良い (任意の 1 次分数変換は、それらの合成として表せるから)。

平行移動、定数倍については直観的にも明らかであろう。
反転 $R(z)=\frac{1}{z}$ のときは、少々計算が必要であるが、次のことを使うと見通しが良い。

ヒント　z, z' が c から発する一本の半直線上にあり、かつ $|z-c||z'-c'|=r^2$ を満たすためには、$(z-c)(\overline{z'}-\overline{c})=r^2$ を満たすことが必要十分である。

以下各自に任せる。

領域の等角写像という概念を紹介する。これについては後で詳しく説明するが、有名かつ重要な話を 3 つ “先行上映” する。

(i) Riemann の写像定理
(ii) 単位円盤の等角写像
(iii) 上半平面の等角写像

(ii), (iii) が 1 次分数変換となることが、1 次分数変換の重要性を示している。(i) の証明中でも、1 次分数変換は基本的ツールとして使われる。

単位円盤を D_1 とおく: $D_1 := D(0;1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

正則関数が正則な逆写像を持つとき、**双正則**(そうせいそく)という。

$\widehat{\mathbb{C}}$ の領域 Ω に対して、$\varphi\colon \Omega \to D_1$ が双正則であるとき、φ を **Ω の等角写像**あるいは **Ω の写像関数**とよぶ。

定理 4.3 (Riemann の写像定理)

$\widehat{\mathbb{C}}$ の領域 Ω が単連結で、$\Omega \ne \mathbb{C}$, $\Omega \ne \widehat{\mathbb{C}}$ ならば、Ω の等角写像が存在する。

Ω は $\mathbb{C}$ の領域, $z_0 \in \Omega$ とするとき、Ω の等角写像で、次の条件 (しばしば**正規化条件**とよばれる) を満たすものは一意的である。

(1) $$\varphi(z_0) = 0, \quad \varphi'(z_0) > 0.$$

"簡単な" 領域の等角写像が 1 次分数変換になることが結構多い。

(等角写像が 1 次分数変換そのものでなくても、その構成に 1 次分数変換が使われるものはとても多い)。

次は非常に有名な定理である。

定理 4.4 (単位円盤の等角写像)

$\Omega = D_1$, $z_0 \in \Omega$ とする。双正則な $\varphi\colon \Omega \to D_1$ で、$\varphi(z_0) = 0$ を満たすものは

$$\varphi(z) := \varepsilon \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}, \quad \varepsilon \in \mathbb{C}, \quad |\varepsilon| = 1. \tag{2}$$

($\varepsilon = e^{i\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R}$) とも書ける。つまり回転だけの自由度しか残らない。)

$\varphi'(z_0) > 0$ という条件を課すと、$\varepsilon = 1$ と定まる。

次は非常に有名な定理である。

定理 4.4 (単位円盤の等角写像)

$\Omega = D_1$, $z_0 \in \Omega$ とする。双正則な $\varphi\colon \Omega \to D_1$ で、$\varphi(z_0) = 0$ を満たすものは

$$\varphi(z) := \varepsilon \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}, \quad \varepsilon \in \mathbb{C}, \quad |\varepsilon| = 1. \tag{2}$$

($\varepsilon = e^{i\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R}$) とも書ける。つまり回転だけの自由度しか残らない。)

$\varphi'(z_0) > 0$ という条件を課すと、$\varepsilon = 1$ と定まる。

この事実の証明を期末レポート課題候補にする。(2) の φ が条件を満たすこと、条件を満たす1次分数変換が (2) に限られることは初等的に導ける。

双正則という仮定から、φ が1次分数変換に限られる、というところに **Schwarz の補題**という有名な定理 (証明はそれほどむつかしくない) が必要になる。

例 4.5 (上半平面の等角写像)

$$H := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$$

を**上半平面**とよぶ。

$$\varphi(z) := \frac{z-i}{z+i} \tag{3}$$

は H の等角写像である。φ は**Cayley変換**（ケーリー）とよばれる。

φ は実軸 $\mathbb{R}$ (H の境界) を単位円周 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ (D_1 の境界) に写す。

例 4.5 (上半平面の等角写像)

$$H := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$$

を**上半平面**とよぶ。

$$\varphi(z) := \frac{z-i}{z+i} \tag{3}$$

は H の等角写像である。φ は**Cayley(ケーリー)変換**とよばれる。

φ は実軸 $\mathbb{R}$ (H の境界) を単位円周 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ (D_1 の境界) に写す。

Hilbert 空間における unitary 変換と自己共役作用素が、Cayley 変換で移り合うという有名な事実がある。

落穂拾い (1)

$\widehat{\mathbb{C}}$ の相異なる 3 点 α, β, γ に対して、

$$(z, \alpha, \beta, \gamma) := \frac{\alpha - \gamma}{\alpha - \beta} \cdot \frac{z - \beta}{z - \gamma}$$

とおき、z, α, β, γ の**非調和比** (cross ratio) とよぶ。

落穂拾い (1)

$\widehat{\mathbb{C}}$ の相異なる 3 点 α, β, γ に対して、

$$(z, \alpha, \beta, \gamma) := \frac{\alpha - \gamma}{\alpha - \beta} \cdot \frac{z - \beta}{z - \gamma}$$

とおき、z, α, β, γ の**非調和比** (cross ratio) とよぶ。

これはつまり、α, β, γ をそれぞれ 1, 0, ∞ に写す一次分数変換による z の像である。

落穂拾い (1)

$\widehat{\mathbb{C}}$ の相異なる 3 点 α, β, γ に対して、

$$(z, \alpha, \beta, \gamma) := \frac{\alpha - \gamma}{\alpha - \beta} \cdot \frac{z - \beta}{z - \gamma}$$

とおき、z, α, β, γ の**非調和比** (cross ratio) とよぶ。

これはつまり、α, β, γ をそれぞれ 1, 0, ∞ に写す一次分数変換による z の像である。

1 次分数変換は非調和比を変えない。すなわち、任意の一次分数変換 f に対して

$$(z, \alpha, \beta, \gamma) = (f(z), f(\alpha), f(\beta), f(\gamma))$$

が成り立つ。

落穂拾い (1)

$\widehat{\mathbb{C}}$ の相異なる 3 点 α, β, γ に対して、

$$(z,\alpha,\beta,\gamma) := \frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}\cdot\frac{z-\beta}{z-\gamma}$$

とおき、z, α, β, γ の**非調和比** (cross ratio) とよぶ。

これはつまり、α, β, γ をそれぞれ 1, 0, ∞ に写す一次分数変換による z の像である。

1 次分数変換は非調和比を変えない。すなわち、任意の一次分数変換 f に対して

$$(z,\alpha,\beta,\gamma) = (f(z),f(\alpha),f(\beta),f(\gamma))$$

が成り立つ。
(証明) $f(\alpha)$, $f(\beta)$, $f(\gamma)$ を 1, 0, ∞ に写す 1 次分数変換を φ とすると、

$$\varphi(w) = (w,f(\alpha),f(\beta),f(\gamma)) \quad (w\in\widehat{\mathbb{C}}).$$

$\varphi\circ f$ は α, β, γ を 1, 0, ∞ に写す 1 次分数変換であるから、

$$\varphi(f(z)) = \varphi\circ f(z) = (z,\alpha,\beta,\gamma) \quad (z\in\widehat{\mathbb{C}}).$$

ゆえに

$$(f(z),f(\alpha),f(\beta),g(\gamma)) = (z,\alpha,\beta,\gamma) \quad (z\in\widehat{\mathbb{C}}). \quad \square$$

落穂拾い (2)

上半平面を単位円板に写す 1 次分数変換の一般形は

$$w = \alpha \frac{z-\beta}{z-\overline{\beta}}, \quad |\alpha| = 1, \quad \mathrm{Im}\,\beta > 0. \tag{4}$$

$\beta = i$, $\alpha = 1$ のとき、いわゆる Cayley 変換となる。

実直線 $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ を自分自身に写す 1 次分数変換は？

参考文献

[1] 桂田祐史：続 複素関数論，「複素関数」講義ノートの続き. http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/zoku-complex-function.pdf (2015 $\sim$).