

# 応用複素関数 第3回

～ Riemann 球面と1次分数変換 ～

かつらだ まさし  
桂田 祐史

2021年4月27日

# 目次

- 1 連絡事項&本日の内容
- 2 Riemann 球面, 1 次分数変換
  - イントロ
  - 1 次分数変換の定義
  - 1 次分数変換の性質
  - 平行移動, 定数倍, 反転
  - $\widehat{\mathbb{C}}$  の円
  - 相異なる 3 点を相異なる 3 点に写す 1 次分数変換
- 3 参考文献

# 連絡事項 & 本日の内容

- 緊急事態宣言が発出され、明治大学は活動制限指針をレベル2に引き上げた。情報の入手につとめ、注意すること。  
「新型コロナウイルス感染症に係る本学の活動状況、感染予防対策、入構制限措置等について (2021/4/23)」
- 複素関数論の基本的なツールである1次分数変換を紹介する (桂田 [1] の §3 の内容, ただしあまり対応は良くない)。そのために、それ自身重要な無限遠点  $\infty$ , Riemann 球面も紹介する。(この話は次回に続く。)

**番号付のルール** スライドの見出しに振ってある番号の最初の数は、この科目の中での節(章?)の番号であり(今回のは2)、定理や定義に振ってある番号の最初の数は、授業の第何回であることを示す(今回のは3)。

# 2 Riemann 球面, 1 次分数変換

## 2.0 イントロ

最初に問:  $\infty$  は数か? (Cf. 実数で考えるときの  $+\infty$ ,  $-\infty$ )

答:  $\infty$  は複素数ではない。「複素関数」ではモノですらなかった。

$\infty$  をモノに格上げし、 $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  を考え、距離空間とする。

$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty \Leftrightarrow \hat{\mathbb{C}}$  において  $f(z)$  が  $\infty$  に収束する、とする。

$\hat{\mathbb{C}}$  はもう体ではない。 $\infty$  は数ではないが、それに準ずるもの。

$\hat{\mathbb{C}}$  を **Riemann 球面** とよぶ。

$\hat{\mathbb{C}}$  を  $\mathbb{P}^1$ ,  $\mathbb{P}(\mathbb{C})$  と表す (1次元複素射影空間と呼ばれる)。**Riemann 面** (説明は略) の典型例である。

こうお膳立てすると、 $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  という関数は非常に基本的となる。  
これを **1次分数変換** とよぶ。

## 2.0 イントロ $\infty$ と四則

$\hat{\mathbb{C}}$  において、 $\lim$  と「合う」ように次のように定めることもある。

①  $(\forall a \in \mathbb{C}) \quad a + \infty = \infty + a = \infty.$

②  $(\forall b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}) \quad b \cdot \infty = \infty \cdot b = \infty.$

③  $\infty \cdot \infty = \infty.$

④  $(\forall a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}) \quad \frac{a}{0} = \infty.$

⑤  $(\forall b \in \mathbb{C}) \quad \frac{b}{\infty} = 0.$

(1) は「 $\lim_{z \rightarrow c} f(z) = a, \lim_{z \rightarrow c} g(z) = \infty \Rightarrow \lim_{z \rightarrow c} (f(z) + g(z)) = \infty$ 」と解釈可能。

しかし、 $\infty + \infty$  や  $0 \cdot \infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$  は定義しない (つじつまが合うように定義出来ない)。

$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  は体ではなく、移項や消去などは気軽に出来ない。

## 2.0 イントロ 余談的注意: $\mathbb{R}$ と $\pm\infty$ , $\mathbb{C}$ と $\infty$

実数の世界の  $\infty$  と複素数の世界の  $\infty$  は、(ふつう) 記号で見分けがつかないが違うものである。ここでは実数世界の  $\infty$  は  $+\infty$  と書く。

$I \subset \mathbb{R}$ ,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \bar{I}$  とする。  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  とは

$$(\forall R \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in I : |x - a| < \delta) f(x) > R.$$

実数の世界には、 $-\infty$  もあって、これは  $+\infty$  とは違うものである。数直線で言うと、 $+\infty$  は右の果て、 $-\infty$  は左の果てである。複素数の世界には、原点から果てしなく遠い点  $\infty$  が1個あるだけ。

$$+\infty \neq -\infty = (-1) \cdot (+\infty),$$

$$(-1) \cdot \infty = \infty$$

$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  を作るように、 $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$  を作れる (杉浦 [2])。

## 2.1 1次分数変換の定義 (1) 定義する前の観察

$a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ,  $ad - bc \neq 0$  とするとき  $\frac{az + b}{cz + d}$  を考える。

①  $c \neq 0$  のとき、 $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$  で連続で

$$\lim_{z \rightarrow -d/c} \frac{az + b}{cz + d} = \infty, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c}.$$

②  $c = 0$  のとき、 $\mathbb{C}$  で連続で

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az + b}{cz + d} = \infty.$$

(注:  $ad - bc \neq 0$  より、 $a \neq 0$  かつ  $d \neq 0$  である。 $-d/c$  と  $a/c$  が  $\infty$  になる、と考えると分かりやすいかも。)

念のため復習  $\Omega \subset \mathbb{C}$ ,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $a \in \bar{\Omega}$ ,  $A \in \mathbb{C}$  とする。

- $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty \Leftrightarrow (\forall R \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall z \in \Omega: |z - a| < \delta) |f(z)| > R.$
- $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = A \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists R \in \mathbb{R})(\forall z \in \Omega: |z| > R) |f(z) - A| < \varepsilon.$

(細かい注意:  $\Omega$  内の点列  $\{z_n\}$  で  $\lim |z_n| = +\infty$  となるものが存在すると仮定しておく。)

## 2.1 1次分数変換の定義 (2) 定義

$a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ,  $ad - bc \neq 0$  とする。

①  $c \neq 0$  のとき

$$\varphi(z) := \begin{cases} \frac{az + b}{cz + d} & (z \neq -d/c, \infty) \\ \infty & (z = -d/c) \\ \frac{a}{c} & (z = \infty) \end{cases}$$

②  $c = 0$  のとき

$$\varphi(z) := \begin{cases} \frac{az + b}{d} & (z \neq \infty) \\ \infty & (z = \infty) \end{cases}$$

で定められる  $\varphi: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  を **1次分数変換** と呼ぶ。

以下、単に  $\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  と表す。 $\varphi(-d/c) = \infty$ ,  $\varphi(\infty) = a/c$  と約束。

## 2.2 1次分数変換の性質 (1)

### 命題 3.1

任意の1次分数変換  $\varphi: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  は連続である。

### 証明.

我々はまだ  $\widehat{\mathbb{C}}$  に距離も位相も導入していない(それで連続性を議論するのは反則!)。しかし、任意の  $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$  に対して  $\lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(z) = \varphi(z_0)$  が成り立つように色々なことを定義する(約束)。その約束が果たされれば連続。□

## 2.2 1次分数変換の性質 (2) 行列と対応させる

複素数成分の、2次の正則行列の全体 (一般線型群) を  $GL(2; \mathbb{C})$  と表す。

$$GL(2; \mathbb{C}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0 \right\}.$$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2; \mathbb{C})$  に対して、1次分数変換  $\varphi_A$  を次式で定める。

$$\varphi_A(z) := \frac{az + b}{cz + d}$$

次が基本的である。

### 命題 3.2

- ①  $A, B \in GL(2; \mathbb{C})$  とするとき  $\varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB}$ .
- ②  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  に対して、 $\varphi_I = \text{id}_{\widehat{\mathbb{C}}}$  ( $\widehat{\mathbb{C}}$  上の恒等写像).
- ③  $A \in GL(2; \mathbb{C})$  ならば  $\varphi_{A^{-1}} = (\varphi_A)^{-1}$ .

## 2.2 1次分数変換の性質 (3) 証明

①  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$  に対して

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pa + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{pmatrix}.$$

$z \in \mathbb{C}, rz + s \neq 0, c\varphi_B(z) + d \neq 0$  とすると

$$\begin{aligned} \varphi_A \circ \varphi_B(z) &= \varphi_A(\varphi_B(z)) = \varphi_A\left(\frac{pz+q}{rz+s}\right) = \frac{a\frac{pz+q}{rz+s} + b}{c\frac{pz+q}{rz+s} + d} \\ &= \dots \text{中略} \dots = \frac{(ap+br)z + (aq+bs)}{(cp+dr)z + cq + ds} = \varphi_{AB}(z). \end{aligned}$$

ゆえに有限個の点を除いて、 $\varphi_A \circ \varphi_B$  と  $\varphi_{AB}$  は一致する。

$\varphi_A \circ \varphi_B$  と  $\varphi_{AB}$  は  $\widehat{\mathbb{C}}$  で連続であるから、 $\widehat{\mathbb{C}}$  全体で一致する。

②  $c = 0$  の場合に相当する。定義より  $\varphi_I(z) = \begin{cases} z & (z \neq \infty) \\ \infty & (z = \infty) \end{cases}$ . これは  $\widehat{\mathbb{C}}$  の恒等写像である。

## 2.2 1次分数変換の性質 (3) 証明(続き), 系

- ③  $A \in GL(2; \widehat{\mathbb{C}})$  のとき、 $A^{-1}$  が存在して、 $A^{-1} \in GL(2; \mathbb{C})$ .  
(1), (2) を用いると

$$\varphi_A \circ \varphi_{A^{-1}} = \varphi_{AA^{-1}} = \varphi_I = \text{id}_{\widehat{\mathbb{C}}}.$$

同様にして  $\varphi_{A^{-1}} \circ \varphi_A = \text{id}_{\widehat{\mathbb{C}}}$ . ゆえに  $\varphi_{A^{-1}} = (\varphi_A)^{-1}$ . □

### 系 3.3

任意の 1 次分数変換は全単射である。

(上の定理の (3) により、逆写像が存在することが分かるから。)

## 2.3 平行移動, 定数倍, 反転 (1)

- ① 平行移動  $b \in \mathbb{C}$  とする。

$$T_b(z) := z + b = \frac{1 \cdot z + b}{0 \cdot z + 1}.$$

- ② 定数倍  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  とする。

$$M_a(z) := az = \frac{a \cdot z + 0}{0 \cdot z + 1}.$$

$a = re^{i\theta}$  ( $r > 0, \theta \in \mathbb{R}$ ) とすると、 $M_a$  は、 $z \mapsto rz$  (拡大または縮小) と  $z \mapsto e^{i\theta}z$  (回転) の2つに分解できる。

- ③ 反転

$$R(z) := \frac{1}{z} = \frac{0 \cdot z + 1}{1 \cdot z + 0}.$$

以上から、平行移動、定数倍、反転が1次分数変換であることが分かった。

## 2.3 平行移動, 定数倍, 反転 (2)

### 命題 3.4

任意の1次分数変換は、平行移動、定数倍、反転の合成として表せる。

(どうやって証明する?)

証明.

(a)  $c \neq 0$  の場合、部分分数分解により

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz + d} = -\frac{ad - bc}{c^2} \cdot \frac{1}{z + d/c} + \frac{a}{c}.$$

これは  $T_{d/c}$ ,  $R$ ,  $M_{-\frac{ad-bc}{c^2}}$ ,  $T_{a/c}$  を合成したものである。

(b)  $c = 0$  の場合、

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{az + b}{d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}.$$

これは  $M_{a/d}$ ,  $T_{b/d}$  を合成したものである。

## 2.4 $\widehat{\mathbb{C}}$ の円 (1) 定義と方程式

$\widehat{\mathbb{C}}$  の円とは、普通の円と直線 ( $\infty$  を通る半径無限大の円と考える) の総称である。

$|\beta|^2 - ac \geq 0$  を満たす  $a, c \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{C}$  を用いて

$$(1) \quad az\bar{z} + \beta\bar{z} + \bar{\beta}z + c = 0$$

の形に表せるもの全体である。

気になる人には自分で確かめてもらおう。

**問** 複素平面内の任意の直線は、ある  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \beta \in \mathbb{R}$  を用いて

$$a\bar{z} + \bar{a}z + \beta = 0$$

と表せる (直線の方程式)。

**問** 複素平面内の任意の円は、ある  $c \in \mathbb{C}, \beta \in \mathbb{R}, \beta \leq |c|^2$  を用いて、

$$z\bar{z} - c\bar{z} - \bar{c}z + \beta = 0$$

と表せる (円の方程式)。

## 2.4 $\widehat{\mathbb{C}}$ の円 (2) 1 次分数変換は $\widehat{\mathbb{C}}$ の円を $\widehat{\mathbb{C}}$ の円に写す

### 命題 3.5 (円円対応)

任意の 1 次分数変換は、 $\widehat{\mathbb{C}}$  の任意の円を  $\widehat{\mathbb{C}}$  の円に写す。

### 証明.

平行移動で、直線は直線に、円は円に写される。

定数倍で、直線は直線に、円は円に写される。

反転  $R(z) = \frac{1}{z}$  でどうなるか調べる。 $\widehat{\mathbb{C}}$  の円の方程式 (1) に、 $z = R^{-1}(w) = \frac{1}{w}$  を代入すると

$$a \frac{1}{w} \overline{\left(\frac{1}{w}\right)} + \beta \overline{\left(\frac{1}{w}\right)} + \bar{\beta} \left(\frac{1}{w}\right) + c = 0.$$

これは次式と同値である。

$$a + \beta w + \bar{\beta} \bar{w} + c w \bar{w} = 0$$

$a' := c, \beta' := \bar{\beta}, c' := a$  とおくと

$$a' w \bar{w} + \beta' \bar{w} + \bar{\beta}' w + c' = 0.$$

これは  $\widehat{\mathbb{C}}$  の円を表している。実際  $|\beta'|^2 - a'c' = |\beta|^2 - ac \geq 0$ . □

## 2.5 相異なる3点を相異なる3点に写す1次分数変換 (1)

### 補題 3.6

$\alpha, \beta, \gamma \in \widehat{\mathbb{C}}$  が相異なるならば

$$\varphi(\alpha) = 1, \quad \varphi(\beta) = 0, \quad \varphi(\gamma) = \infty$$

を満たす1次分数変換が一意的に存在する。

**証明** (存在)  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$  (3つとも有限) の場合は

$$(2) \quad \varphi(z) := \frac{\alpha - \gamma}{\alpha - \beta} \cdot \frac{z - \beta}{z - \gamma}.$$

これが条件を満たすことは目視で確認できる。

$\beta = \infty$  の場合は  $\varphi(z) := \frac{\alpha - \gamma}{z - \gamma}$ ,  $\gamma = \infty$  の場合は  $\varphi(z) := \frac{z - \beta}{\alpha - \beta}$ ,  $\alpha = \infty$  の場合は  $\varphi(z) := \frac{z - \beta}{z - \gamma}$  とすればよい。

**注** (証明の途中だけれど) (2) は自分で書けるようにしておくべき公式である。  
( $\beta$  で0より赤、 $\gamma$  で $\infty$ より青、最後に $\alpha$ で1となるように調節するオレンジ)

## 2.5 相異なる3点を相異なる3点に写す1次分数変換 (2)

(一意性)  $\varphi_1, \varphi_2$  が条件を満たすならば、 $\varphi := \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$  も1次分数変換で

$$\varphi(1) = 1, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(\infty) = \infty.$$

$\varphi(\infty) = \infty$  より、ある  $a, b$  が存在して  $\varphi(z) = az + b$ .

$\varphi(0) = 0$  より、 $b = 0$ .

$\varphi(1) = 1$  より、 $a = 1$ .

ゆえに  $\varphi(z) = z = \text{id}_{\widehat{\mathbb{C}}}(z)$ . すなわち  $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} = \text{id}_{\widehat{\mathbb{C}}}$ .

$\varphi_1$  を右からかけて  $\varphi_1 = \varphi_2$ . □

## 2.5 相異なる3点を相異なる3点に写す1次分数変換 (3)

命題 3.7 (任意の3点を任意の3点に写せる)

$\alpha, \beta, \gamma \in \widehat{\mathbb{C}}$  が相異なり、 $\alpha', \beta', \gamma' \in \widehat{\mathbb{C}}$  が相異なるならば、ある1次分数変換  $\varphi$  が存在して

$$\varphi(\alpha) = \alpha', \quad \varphi(\beta) = \beta', \quad \varphi(\gamma) = \gamma'.$$

証明.

一般に  $\alpha, \beta, \gamma$  を  $1, 0, \infty$  に写す1次分数変換を  $\varphi_{\alpha, \beta, \gamma}$  と表すことにすると、

$$\varphi := \varphi_{\alpha', \beta', \gamma'}^{-1} \circ \varphi_{\alpha, \beta, \gamma}$$

とすればよい。 □

## 2.5 相異なる3点を相異なる3点に写す1次分数変換 (4)

**例題** 1, 2, 3 を 2, 3, 1 に写す1次分数変換を求めよ。

**(解答)** 命題 3.7 の証明を実行する、というイメージの解答である。

1, 2, 3 を 1, 0,  $\infty$  に写す1次分数変換は

$$\varphi_{1,2,3}(z) = \frac{1-3}{1-2} \cdot \frac{z-2}{z-3} = \frac{2z-4}{z-3}. \quad \text{対応する行列は } \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

2, 3, 1 を 1, 0,  $\infty$  に写す1次分数変換は

$$\varphi_{2,3,1}(z) = \frac{2-1}{2-3} \cdot \frac{z-3}{z-1} = \frac{-z+3}{z-1}. \quad \text{対応する行列は } \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

求める1次分数変換に対応する行列は

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -13 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}.$$

ゆえに  $\varphi(z) = \frac{5z-13}{3z-7}$ .

□

- [1] 桂田祐史：続 複素関数論, 「複素関数」講義ノートの続き. <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/zoku-complex-function.pdf> (2015 ~).
- [2] 杉浦光夫：解析入門 I, 東京大学出版会 (1980), 詳しい (しばしば辞書的といわれる)。丸善 eBook では、<https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000046843> でアクセスできる。この eBook まともな目次を付けてほしい。