

応用複素関数 第2回

～ 留数定理の応用 第2回 ～

かつらだ まさし
桂田 祐史

2021 年 4 月 20 日

目次

- ① 連絡事項, 本日の内容
- ② 留数定理の応用 (続き)
 - 級数の話
 - イントロ
 - s_1, s_2, s_3 の性質 (続き)
 - 和の公式とその証明
 - 級数の和の公式の適用例
 - Basel 問題 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (有名な問題への一つの解)
- ③ 余談 1: $\pi \cot(\pi z)$ の部分分数展開
- ④ 余談 2: Euler による $\sin$ の無限積展開
- ⑤ 参考文献

連絡事項, 本日の内容

- 前回は資料の準備が遅れてごめんなさい (今後は火曜朝までに準備します)。
- Zoom オフィスアワーを火曜 11:30-12:30 に行います (ただし 4/27 はお休み)。参加するための URL はシバラスの補足に載せてあります。
うっかり間違えて今載せました (2021/4/20 11:27:10)。
- 主に講義ノート [1] の §1.3 の内容を講義します (スライドとは番号が対応していません)。

1.6 級数の和

1.6.1 イントロ

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の和を求めるためにも、留数が利用できる場合がある。簡単な場合を紹介する。

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ で、 a_n がある正則関数 f に対して、 $a_n = f(n)$ となっている場合に、

$$n \in \mathbb{Z} \text{ を } 1 \text{ 位の極に持ち、} \operatorname{Res}(s; n) = 1$$

という条件を満たす s を適当に選んで、 $f \cdot s$ についての線積分を考える、というのが基本的なアイデアである ($\operatorname{Res}(f s; n) = f(n) \operatorname{Res}(s; n) = f(n)$ に注意)。具体的には、 s として次の関数を採用する:

$$s_2(z) := \pi \cot \pi z = \frac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \quad (\cot \text{ 知らなくても後で説明します}).$$

実はこの s_2 は色々な場面で利用される。(「応用複素関数」の中で、最低一つはそういう話を見せておきたいので、ここでやってみた。)

1.6.2 s_1, s_2, s_3 の性質

この 1.6 を通じて、次式で定める s_1, s_2, s_3 を用いる。

$$s_1(z) := \frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \pi \operatorname{cosec}(\pi z), \quad s_2(z) := \frac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \pi \cot(\pi z),$$

$$s_3(z) := s_2(z) - i\pi \quad \left(= \frac{2\pi i}{e^{2\pi iz} - 1} \right).$$

- s_1, s_2 の定義式の分母、分子は整関数 ($\mathbb{C}$ 全体で正則) である。
- s_1, s_2 の定義式の分母 $\sin(\pi z)$ の零点は n ($n \in \mathbb{Z}$) で、位数は 1. 実際

$$\sin(\pi z) = 0 \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) \pi z = n\pi \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) z = n.$$

さらに $\frac{d}{dz}(\sin \pi z) \Big|_{z=n} = \pi \cos(n\pi) = (-1)^n \pi \neq 0$.

- s_1, s_2, s_3 の極は n ($n \in \mathbb{Z}$) で、その位数は 1. 留数は

$$\operatorname{Res}(s_1; n) = \frac{\pi}{(\sin(\pi z))'} \Big|_{z=n} = (-1)^n,$$

$$\operatorname{Res}(s_3; n) = \operatorname{Res}(s_2; n) = \frac{\pi \cos(\pi z)}{(\sin(\pi z))'} \Big|_{z=n} = 1.$$

1.6.2 s_1, s_2, s_3 の性質 (続き)

以下の積分路 Γ_N ($N \in \mathbb{N}$) をしばしば用いる。

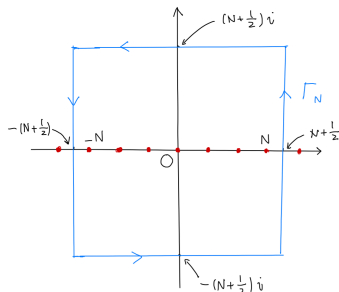


図 1: 1 辺 $2(N + 1/2)$ の正方形の周を正の向きに回る

- 曲線 Γ_N 上には s_1, s_2, s_3 の極 (赤い点) はない。極との距離は $1/2$.
- $|s_j(z)| \leq 2\pi$ ($j = 1, 2; z \in \Gamma_N^*$).
(この不等式の証明に難しいところはないが、意外に面倒なのでここではサボる。講義ノート [1] §1.3 には書いてある。)

ちょっと講釈: sec, cosec, cot

三角関数というと、学校数学では $\sin$, $\cos$, $\tan$ の露出度が高いが、

セカント, コセカント, コタンジェント
 $\sec$, cosec , $\cot$ というものもある:

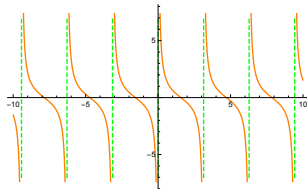
$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}, \quad \operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta}, \quad \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}.$$

大昔の三角関数表には (Wikipedia の Trigonometric tables 等参照)、 $\sin$, $\tan$, $\sec$ の値が載っていた。

$\cos(\text{ine})$, $\cot(\text{angent})$, $\operatorname{cosec}(\text{ant})$ はそれぞれ余角の $\sin$, $\tan$, $\sec$ である:

$$\cos \theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right), \quad \cot \theta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right), \quad \operatorname{cosec} \theta = \sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right).$$

$y = \cot x$ のグラフは、 $\cot x = \tan(\pi/2 - x)$ に気づくとすぐ分かる。



1.6.3 和の公式とその証明

定理 2.1 (級数の和の公式)

$P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2$, $(\forall n \in \mathbb{Z}) P(n) \neq 0$,
 $f = \frac{Q}{P}$ とするとき

$$(1) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = - \sum_{c \text{ は } f \text{ の極}} \operatorname{Res}(f s_2; c),$$

$$(2) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n) = - \sum_{c \text{ は } f \text{ の極}} \operatorname{Res}(f s_1; c),$$

$$(3) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{in\theta} = - \sum_{c \text{ は } f \text{ の極}} \operatorname{Res}\left(f(z) s_3(z) e^{iz\theta}; c\right) \quad (\theta \in [0, 2\pi]).$$

((3) の左辺は Fourier 級数の形をしていることに注意。)

1.6.3 和の公式とその証明

$P(z)$, $Q(z)$ についての仮定より

$$(\exists R \in \mathbb{R})(\exists C \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R) \quad P(z) \neq 0 \wedge |f(z)| \leq \frac{C}{|z|^2}.$$

以下 $N \in \mathbb{N}$ は $N \geq R$ を満たすとする。 P と Q は $\mathbb{C}$ 全体で正則であるので、 f のすべての極は P の零点であり、それらは $D(0; R)$ に含まれる。ゆえに Γ_N の内部に含まれる。留数定理によって

$$\int_{\Gamma_N} f(z)s_j(z) dz = 2\pi i \sum_{k=-N}^N \operatorname{Res}(fs_j; k) + 2\pi i \sum_{c \text{ は } f \text{ の極}} \operatorname{Res}(fs_j; c).$$

k は s_j の 1 位の極であり、 f は k のある近傍で正則であるから

$$\operatorname{Res}(fs_j; k) = f(k) \operatorname{Res}(s_j; k) = \begin{cases} (-1)^k f(k) & (j=1) \\ f(k) & (j=2). \end{cases}$$

後は $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_N} f(z)s_j(z) dz = 0$ を示せば良い。 $|f(z)| \leq \frac{C}{N^2}$ ($z \in \Gamma_N$) であるから

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_N} f(z)s_j(z) dz \right| &\leq \int_{\Gamma_N} |f(z)| |s_j(z)| |dz| \leq \frac{C}{N^2} \cdot 2\pi \int_{\Gamma_N} |dz| \\ &= \frac{2\pi C}{N^2} \cdot 4(2N+1) \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty). \quad \square \end{aligned}$$

1.6.4 級数の和の公式の適用例

$a > 0$ とするとき $S := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}$ を求めよう。

関数 $f(z) := \frac{1}{z^2 + a^2}$ は定理の仮定の条件を満たす。また f は偶関数であるから

$$2S + \frac{1}{a^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = - \sum_{c \text{ は } f \text{ の極}} \operatorname{Res}(fs_2; c).$$

f の極 c は $c = \pm ia$ で位数は 1 であるから

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(fs_2; \pm ia) &= s_2(\pm ia) \operatorname{Res}(f; \pm ia) = \pi(-i \coth(\pm \pi a)) \cdot \frac{1}{2z} \Big|_{z=\pm ia} \\ &= -\frac{\pi}{2a} \coth(\pi a). \end{aligned}$$

(ただし $\cot(iz) = -i \coth z$ を用いた。これについては次ページで説明する。) ゆえに

$$2S + \frac{1}{a^2} = \frac{\pi}{a} \coth(\pi a). \quad \therefore \quad S = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{a} \coth(\pi a) - \frac{1}{a^2} \right). \quad \square$$

メモ: 三角関数、双曲線関数の iz での値

(必要になったとき自分で導くものだろうけれど、書いてあると安心。) よく知られた

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2},$$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \cot z = \frac{1}{\tan z}, \quad \coth z = \frac{1}{\tanh z}.$$

から容易に次が導ける。

$$\cosh(iz) = \cos z, \quad \sinh(iz) = i \sin z, \quad \tanh(iz) = i \tan z,$$

$$\cos(iz) = \cosh z, \quad \sin(iz) = i \sinh z, \quad \tan(iz) = i \tanh z,$$

$$\coth(iz) = -i \cot z, \quad \cot(iz) = -i \coth z.$$

1.6.5 Basel 問題 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (有名な問題への一つの解)

定理の仮定 ($\forall n \in \mathbb{Z}$) $P(n) \neq 0$ が満たされない場合も、証明をたどると次が示せる。

$$\sum_{n \in \mathbb{Z} \wedge P(n) \neq 0} f(n) = - \sum_{c \text{ は } f \text{ の極}} \text{Res}(f_{S_2}; c).$$

$f(z) = \frac{1}{z^2}$ の場合にこれを用いると

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z} \wedge n^2 \neq 0} f(n) = - \sum_{c \text{ は } f \text{ の極}} \text{Res}(f_{S_2}; c) = - \text{Res}\left(\frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2}; 0\right).$$

ところで

$$\cot z = \frac{1}{z} - \frac{z}{3} - \frac{z^3}{45} + \cdots \quad (0 < |z| < \pi)$$

であるから

$$\frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2} = \frac{1}{z^3} - \frac{\pi^2}{3} \cdot \frac{1}{z} - \frac{\pi^4}{45} z + \cdots \quad (0 < |z| < 1).$$

$$\text{ゆえに } \text{Res}\left(\frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2}; 0\right) = -\frac{\pi^2}{3}. \quad \text{ゆえに } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

□

余談 1: $\pi \cot(\pi z)$ の部分分数展開

(授業時間が不足する可能性があるので、ここで紹介)

上で見たように、 $\pi \cot(\pi z)$ の極は $n \in \mathbb{Z}$ であり、その位数は 1, 留数は 1 であるから、Laurent 展開の主部は $\frac{1}{z-n}$ である。

和 $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{z-n}$ は無限和なので収束が問題になるが、もし収束するならば、 $\pi \cot(\pi z) - \sum_n \frac{1}{z-n}$ は $\mathbb{C}$ 全体で正則になるはずである。

$$\text{実は (ある意味で) } \pi \cot(\pi z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{z-n}.$$

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z-n} = \lim_{N_1, N_2 \rightarrow \infty} \sum_{n=-N_1}^{N_2} \frac{1}{z-n}$ は収束しないが、 $N_1 = N_2 \rightarrow \infty$ とすると、 $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ で広義一様収束する。

余談 1: $\pi \cot(\pi z)$ の部分分数展開 (続き)

次式が成り立つ:

$$(4) \quad \pi \cot(\pi z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \frac{1}{z-n} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} \quad (\text{in } \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}).$$

$n \in \mathbb{Z}$ を 1 位の極に持ち、留数が 1 という関数として、(4) の右辺は考える最も簡単な関数であろうが、それが三角関数 $\pi \cot(\pi z)$ とぴったり一致するというのは、私にはとても不思議に感じられる。

細かい注意: $\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z-(-n)} = \frac{2z}{z^2-n^2}$ である。 $\frac{1}{z-n} \sim -\frac{1}{n}$, $\frac{2z}{z^2-n^2} \sim -\frac{2z}{n^2}$ となり、後者は $n \rightarrow \pm\infty$ のとき速く減衰する。そのことから、(4) の右辺は、**広義一様収束**という良い性質を持つことが導ける。例えば項別微分も可能で、次式が導ける。

$$(5) \quad \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(z-n)^2} + \frac{1}{(z+n)^2} \right).$$

収束に関する議論は、講義ノート [1] §2.4 に任せる。

余談2: Euler による $\sin$ の無限積展開

無限積

$$f(z) := \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) = \pi z \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

は $\mathbb{C}$ で正則であることが (実は) 分かる。その対数微分を計算すると

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

この右辺は $\pi \cot(\pi z)$ に他ならないので

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \pi \cot(\pi z) = \frac{(\sin(\pi z))'}{\sin \pi z}.$$

これから $f(z) = \sin \pi z$ を導くことが出来る。ゆえに

$$(6) \quad \sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

これは $\sin \pi z$ の因数分解のような式である。発見したのは Euler である。
(これも詳しくは講義ノート [1] §2.5 を見よ。)

レポート課題 A, B, ...

この「応用複素関数」では、例年ペーパーテスト向きの問題を期末試験に出題し、コンピューターを用いる実験はレポート課題 (レポート課題 1, 2, ...) としてきた。後者については今年度もそうするつもりであるが、前者については期末レポート (レポート課題 A, B, ...) で代替する。

「期末レポート」という名前であるが、課題そのものは随時示していくつもりである (提出は最後)。

1 「続 留数定理の応用」の範囲からは次を候補問題としておく。

レポート課題 A, B, ... (候補)

本日の定理 2.1 の (3) の公式の証明をせよ。 s_3 の評価も含めて詳しく書くこと (講義ノート [1] や、一松 [2] が参考になるが、どちらも細部までは書かれていない)。

- [1] 桂田祐史：続 複素関数, 「複素関数」講義ノートの続き.
<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/zoku-complex-function-2021.pdf> (2015～).
- [2] ひとつまつしん 一松 信：留数解析 — 留数による定積分と級数の計算, 共立出版 (1979), 第 5 章は数値積分の高橋-森理論の解説.