

応用複素関数 第1回

～ ガイダンス, 留数定理の応用 第1回 ～

かつらだ まさし
桂田 祐史

2021年4月13日

ガイダンス (1) 講義内容

(複素関数・同演習の履修を前提とするので、自己紹介はカットします。)

- 内容は二本立て。複素関数論の基礎 (「複素関数」の続き) と、応用トピックの紹介
- 複素関数論の基礎的事項 (テキストに載っていることが多い)
 - 留数定理の応用 続き (定積分、無限級数の和の計算)
 - 無限遠点 ∞ の導入, リーマン球面 $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, 1 次分数変換 $w = \frac{az+b}{cz+d}$
 - 等角写像, Riemann の写像定理, ポテンシャル問題
 - 解析接続 (時間なくなりそうな予感がする…)

(期末試験が出来れば、試験で出題しやすい分野ですが、レポートで何とかします。)

- 応用トピックの紹介
 - 流体力学への応用 (2次元ポテンシャル流など)
 - 数値積分公式の誤差解析, 特に台形公式の最適性と二重指数関数型積分公式
 - ポテンシャル問題の数値解法
 - 佐藤超関数

(コンピューターを使う場面が多い。レポート課題を出す。)

- これらの項目は、完全に独立しているわけではなく、色々関係がある。

ガイダンス (2) どんなふう to 授業するか

基本 オンデマンド授業で行います。

- 複素関数論の基礎については、オンデマンド講義**だけ**で問題ない、と考えています。大学側からは、1回の授業に、10分程度の動画を5本くらい提供するのが目安と言われています (板書必要ないし、割と妥当そうです)。僕は詰め込む性質なので、トータル70分強になるかもしれません。
- コンピューター実習を伴うところは、個別の対応の必要性が高いですが、オンデマンド授業+Zoomでの**個別**対応、で何とかする予定です。

(動画で使ったスライドから直したところを赤字で書いています。)

ガイダンス (3) 成績評価、質問

- 現時点で「一般には期末試験を行う (かもしれない)」となっておりますが、出来なくなる可能性も高いので、この科目はレポートだけで評価することにしていきます。
- 例年「気軽に質問にして」と言うことにはしていますが…
授業時間後半 (火曜 11:30~12:30) に Zoom 会議を開いてみます (ただし2回目の授業からにします)。

(動画で使ったスライドから直したところを赤字で書いています。)

1 続 留数定理の応用

1.1 はじめに

まず軽く留数定理と、極における留数の計算法を復習する。それから、

- 有名な $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ の説明 (「複素関数」で説明しそびれた(る)ので。)

(積分路上に1位の極があるとき、どうなるかは学ぶに価する。)

- 無限和 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)$ の計算の話も知っておくと良い。

(登場する $\pi \operatorname{cosec} \pi z = \frac{\pi}{\sin \pi z}$, $\pi \cot \pi z = \frac{\pi \cos \pi z}{\sin \pi z}$ が意外と人気者)

- 有限区間の積分 $\int_a^b f(x) dx$ の計算への、留数定理の応用は、後の数値積分公式の誤差解析や、佐藤超関数に通じるところがある。— これは時間がなければカットするかも (後になってから話しても良いので)。

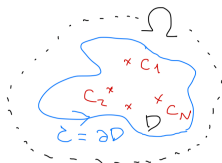
1.1 留数定理と極における留数の計算 (1)

この 1.1 は復習なので、超特急で進めます。使いそうなものを列挙しました。(うろ覚えならば「複素関数」復習してください。)

命題 1.1 (留数定理)

D は \mathbb{C} 内の有界領域で、その境界 ∂D は区分的 C^1 級正則単純閉曲線とする (向きはいわゆる正の向きとする)。また c_1, c_2, \dots, c_N は D 内の相異なる点であり、 Ω は $\overline{D} \subset \Omega$ を満たす \mathbb{C} の開集合、 $f: \Omega \setminus \{c_1, c_2, \dots, c_N\} \rightarrow \mathbb{C}$ は正則とする。このとき、

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^N \text{Res}(f; c_j).$$



1.1 留数定理と極における留数の計算 (2)

留数を求める方法はケース・バイ・ケースであるが、極の場合は少し一般的な話ができる (知っておくべき)。

命題 1.2 (極の留数)

$k \in \mathbb{N}$, c が f の高々 k 位の極ならば、

$$\operatorname{Res}(f; c) = \lim_{\substack{z \neq c \\ z \rightarrow c}} \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{d}{dz} \right)^{k-1} \left[(z-c)^k f(z) \right].$$

(次の定理は、この定理に含まれているが、念のため書いておく。)

命題 1.3 (1 位の極の留数)

c が f の高々 1 位の極ならば、

$$(1) \quad \operatorname{Res}(f; c) = \lim_{z \rightarrow c} (z-c)f(z).$$

1.1 留数定理と極における留数の計算 (3)

(lim 求めるより、微分を計算する方が簡単なこともある、ということで次も良く使う。)

命題 1.4 (有理関数の分母の 1 位の零点における留数)

$f(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}$, $P(z)$ と $Q(z)$ は c の近傍で正則、 c は $P(z)$ の 1 位の零点 ($P(c) = 0$ かつ $P'(c) \neq 0$ という事) ならば、 c は f の高々 1 位の極で

$$(2) \quad \text{Res}(f; c) = \frac{Q(c)}{P'(c)}.$$

1.1 留数定理と極における留数の計算 (4)

次の命題は「複素関数」ではやや軽めの扱いだった。後の例では

$$\varphi(z) = \log z, \quad \varphi(z) = \pi \operatorname{cosec} \pi z, \quad \varphi(z) = \pi \cot \pi z$$

として利用することが多い。

命題 1.5 (1位の極を持つ関数と正則関数の積の留数)

c は f の 1 位の極であり、 φ は c の近傍で正則とする。このとき

$$\operatorname{Res}(f\varphi; c) = \varphi(c) \operatorname{Res}(f; c).$$

証明.

(念のため略証だけでも)

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f\varphi; c) &= \lim_{z \rightarrow c} (z - c) (f(z)\varphi(z)) = \left(\lim_{z \rightarrow c} (z - c) f(z) \right) \lim_{z \rightarrow c} \varphi(z) \\ &= \operatorname{Res}(f; c) \varphi(c). \end{aligned}$$

□

1.2 定積分計算への留数の応用 (1) 復習

z の複素係数多項式全体を $\mathbb{C}[z]$ で表す。多項式の次数を \deg で表す。

命題 1.6 (有理関数の実軸上の積分)

$P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2$, $(\forall x \in \mathbb{R}) P(x) \neq 0$,
 $f(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}$ とするとき、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c > 0} \operatorname{Res}(f; c).$$

命題 1.7 (有理関数の Fourier 変換)

$P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 1$, $(\forall x \in \mathbb{R}) P(x) \neq 0$, $f(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}$,
 $a > 0$ とするとき、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax} dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c > 0} \operatorname{Res}(f(z)e^{iaz}; c).$$

1.2 定積分計算への留数の応用 (2) その他

上の定理 (「複素関数」で学んだ) 以外にも色々ある。

簡単のため、 f は有理関数とする。次のような定積分についても、留数定理を応用した計算法がある (どちらも対数関数がらみ)。

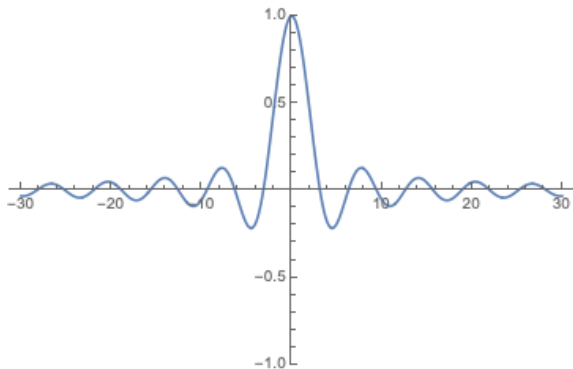
- $n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$ に対して、 $\int_0^{\infty} f(x)(\log x)^n dx$
- $0 < \alpha < 1$ に対して、 $\int_0^{\infty} x^\alpha f(x) dx$ (Mellin 変換)

次のテキストは、コンパクトだが、面白い例がたくさん載っている。

一松 信, 留数解析 — 留数による定積分と級数の計算, 共立出版 (1979).

(こういうのが好きな人もいるだろうから、授業で紹介しなかった方法を使う例を詳しく説明しなさい、という課題はあるかな。)

$\frac{\sin x}{x}$ のグラフ



$\frac{\sin x}{x}$ のグラフ ($x \rightarrow \pm\infty$ で減衰していく)

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \text{ はどうなる?}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0, R \rightarrow +\infty} \int_{\varepsilon}^R \frac{\sin x}{x} dx \text{ と考えるべき??}$$

1.3 Dirichlet 積分 $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ (難しさを語る)

とても有名な定積分である。

被積分関数は、Fourier 解析を勉強した人にはおなじみの sinc である。

分母が x であり、積分区間の端で 0 になるので、その意味でも広義積分である。 $x \rightarrow 0$ のとき $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ であるので (複素関数論的にも 0 は $\frac{\sin z}{z}$ の**除去可能特異点**である)、 $x = 0$ で連続とみなせる。ゆえに広義積分が収束 (存在) することが分かる。—— これは認めよう (比較的簡単)。

ところが $\frac{\sin z}{z}$ は複素関数としては、絶対値が非常に大きくなることもあり、これを使って積分の値を求めるのは難しい。

「複素関数」でも時々出て来た $\sin x = \text{Im } e^{ix}$ という関係を使おう。

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Im } \frac{e^{ix}}{x} dx = \frac{1}{2} \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx.$$

さっき出て来た定理が使える？

そのままでは使えない! $\frac{e^{ix}}{x}$ は $x = 0$ でマズい状態 (分母 0, 分子 $\neq 0$)。この広義積分は収束しない。

($P(x) = x$ が、さっきの定理の条件「 $(\forall x \in \mathbb{R}) P(x) \neq 0$ 」を満たさない。)

1.4 主値積分 (1) 紹介

実軸上の区間 $[a, b]$ で連続な関数 f , $c \in (a, b)$ に対して、広義積分

$$\int_a^b \frac{f(x)}{x-c} dx = \lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow +0} \left(\int_a^{c-\varepsilon_1} \frac{f(x)}{x-c} dx + \int_{c+\varepsilon_2}^b \frac{f(x)}{x-c} dx \right)$$

は一般には存在しない ($f(c) \neq 0$ であれば発散する)。

しかし ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ という制限をつけての極限)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} \frac{f(x)}{x-c} dx + \int_{c+\varepsilon}^b \frac{f(x)}{x-c} dx \right)$$

は存在することがある。このとき、この極限値を

$$\text{p.v.} \int_a^b \frac{f(x)}{x-c} dx$$

と表し、**Cauchyの主値積分** (the Cauchy principal value) と呼ぶ。

一般の場合の定義は書かない。特異点を避ける「穴」を(右と左で同じになるよう) 対称性があるように取るのが要点である。

1.4 主値積分 (2) 例 広義積分は発散、主値積分は存在

例 1.8 (広義積分は発散するが、主値積分は存在する)

$a < 0 < b$ とするとき、 $I_1 := \int_a^b \frac{dx}{x}$ は発散するが、

$$I_2 := \text{p.v.} \int_a^b \frac{dx}{x} = \log \frac{b}{|a|}.$$

実際、

$$\begin{aligned} \int_a^{-\varepsilon_1} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon_2}^b \frac{dx}{x} &= [\log |x|]_a^{-\varepsilon_1} + [\log |x|]_{\varepsilon_2}^b \\ &= \log \varepsilon_1 - \log |a| + \log b - \log \varepsilon_2 = \log \frac{b}{|a|} + \log \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \end{aligned}$$

であるから、 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow +0$ としても収束しないが、 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ として $\varepsilon \rightarrow +0$ とすれば $\log \frac{b}{|a|}$ に収束する。ゆえに I_1 は収束せず、 $I_2 = \log \frac{b}{|a|}$ 。

1.4 主値積分 (3) 実軸上に1位の極がある場合

定理 1.9 (実軸上に1位の極がある場合の定積分の公式)

$P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $f(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}$, P は \mathbb{R} 上で高々1位の零点しか持たないとする。

① $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2$ のとき

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } c > 0} \text{Res}(f; c) + \pi i \sum_{\text{Im } c = 0} \text{Res}(f; c).$$

② $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 1$ のとき、任意の $a > 0$ に対して

$$\begin{aligned} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iax} dx &= 2\pi i \sum_{\text{Im } c > 0} \text{Res}(f(z) e^{iaz}; c) \\ &\quad + \pi i \sum_{\text{Im } c = 0} \text{Res}(f(z) e^{iaz}; c). \end{aligned}$$

(実軸上の孤立特異点 ($\text{Im } c = 0$ を満たす c) の留数は半分だけ加えれば良い。)

1.4 主値積分 (4) 状況の図による説明

これまで: $(\forall x \in \mathbb{R}) P(x) \neq 0$

今回: $P(c) = 0, P'(c) \neq 0, \operatorname{Im} c = 0$ を満たす c が存在しうる

定理 1.9 (1) の証明の概略 (part 1)

f の極のうち、実軸上にあるものを $c_1 < c_2 < \dots < c_N$ とする。

$\bar{D}(c_j; \varepsilon)$ に c_j 以外の極が含まれないように $\varepsilon > 0$ を十分小さく取る。

R を十分大きく取り、 f のすべての極が $|z| < R$ の中にあり、
 $-R < c_1 - \varepsilon$, $c_N + \varepsilon < R$ を満たすとする。

半円弧 $C_{\varepsilon,j}$ ($j = 1, \dots, N$) を

$$-C_{\varepsilon,j} : z = c_j + \varepsilon e^{i\theta} \quad (\theta \in [0, \pi])$$

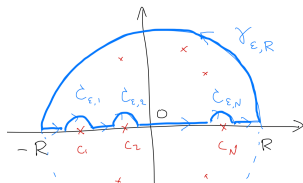
で定め (ふつうと逆向き, 時計回り),

$$\Gamma_{\varepsilon,R} := [-R, c_1 - \varepsilon] + \sum_{j=1}^{N-1} (C_{\varepsilon,j} + [c_j + \varepsilon, c_{j+1} - \varepsilon]) + [c_N + \varepsilon, R],$$

$$C_R : z = R e^{i\theta} \quad (\theta \in [0, \pi]),$$

$$\gamma_{\varepsilon,R} := \Gamma_{\varepsilon,R} + C_R$$

により閉曲線 $\gamma_{\varepsilon,R}$ を定める。



定理 1.9 (1) の証明の概略 (part 2)

留数定理により、

$$\int_{\gamma_{\varepsilon,R}} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c > 0} \operatorname{Res}(f; c).$$

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \int_{-R}^{c_1 - \varepsilon} f(x) dx + \sum_{j=1}^N \left(\int_{C_{\varepsilon,j}} f(z) dz + \int_{c_j + \varepsilon}^{c_{j+1} - \varepsilon} f(x) dx \right) + \int_{c_N + \varepsilon}^R f(x) dx \\ &\quad + \int_{C_R} f(z) dz \\ &= \left(\int_{-R}^{c_1 - \varepsilon} f(x) dx + \sum_{j=1}^N \int_{c_j + \varepsilon}^{c_{j+1} - \varepsilon} f(x) dx + \int_{c_N + \varepsilon}^R f(x) dx \right) + \sum_{j=1}^N \int_{C_{\varepsilon,j}} f(z) dz \\ &\quad + \int_{C_R} f(z) dz. \end{aligned}$$

定理 1.9 (1) の証明の概略 (part 3) じっくり考えよう

$\varepsilon \rightarrow +0$ のとき、右辺第 1 項は

$$\int_{-R}^{c_1-\varepsilon} f(x) dx + \sum_{j=1}^{N-1} \int_{c_j+\varepsilon}^{c_{j+1}-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c_N+\varepsilon}^R f(x) dx \rightarrow \text{p.v.} \int_{-R}^R f(x) dx.$$

右辺第 2 項について考える。 f の c_j における Laurent 展開の主部は $\frac{\text{Res}(f; c_j)}{z - c_j}$ である。

g_j を、 $g_j(z) := f(z) - \frac{\text{Res}(f; c_j)}{z - c_j}$ で定めると、

$$\begin{aligned} \int_{C_{\varepsilon,j}} f(z) dz &= \int_{C_{\varepsilon,j}} \frac{\text{Res}(f; c_j)}{z - c_j} dz + \int_{C_{\varepsilon,j}} g_j(z) dz, \\ \int_{C_{\varepsilon,j}} \frac{\text{Res}(f; c_j)}{z - c_j} dz &= - \int_0^\pi \frac{\text{Res}(f; c_j)}{\varepsilon e^{i\theta}} \cdot i\varepsilon e^{i\theta} d\theta = -\pi i \text{Res}(f; c_j). \end{aligned}$$

g_j は c_j の十分小さな近傍で正則であるから、 $\varepsilon \rightarrow +0$ とするとき

$$\int_{C_{\varepsilon,j}} g_j(z) dz \rightarrow 0.$$

ゆえに $\varepsilon \rightarrow +0$ のとき

$$\sum_{j=1}^N \int_{C_{\varepsilon,j}} f(z) dz \rightarrow -\pi i \sum_{j=1}^N \text{Res}(f; c_j).$$

定理 1.9(1) の証明の概略 (part 4)

ゆえに

$$\text{p.v.} \int_{-R}^R f(x) dx - \pi i \sum_{j=1}^N \text{Res}(f; c_j) + \int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\text{Im } c > 0} \text{Res}(f; c)$$

$R \rightarrow +\infty$ のとき、左辺第 3 項は 0 に収束する。ゆえに

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } c > 0} \text{Res}(f; c) + \pi i \sum_{j=1}^N \text{Res}(f; c_j). \quad \square$$

(「この証明を細部まできちんと書け」というのは良い課題になるかも。)

1.5 Dirichlet 積分 $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ (解決)

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

これは普通の広義積分として収束し、主値積分とも一致する。

$$I = \frac{1}{2} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Im} \frac{e^{ix}}{x} dx = \frac{1}{2} \text{Im} \left(\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx \right)$$

定理 1.9 (2) を用いて主値積分を計算すると

$$I = \frac{1}{2} \text{Im} \left(\pi i \text{Res} \left(\frac{e^{iz}}{z}; 0 \right) \right) = \frac{1}{2} \text{Im} \left(\pi i \frac{e^{iz}}{(z)'} \Big|_{z=0} \right) = \frac{1}{2} \cdot \text{Im} (\pi i \cdot e^{i0}) = \frac{\pi}{2}.$$

(注意 「複素関数」の教科書(神保 [1])では、この定積分は主値積分という言葉は使わずに説明してあるが、実際にやっている議論は上と同じである。主値積分は色々なところで顔を出すので、それを紹介するような説明をしてみた。)

本日のまとめ

- この講義科目のガイダンスを行った。
- 1 続 留数定理の応用のイントロ
- 1.1, 1.2 「複素関数」の復習

- 題材として $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ を選択

- 主値積分の紹介
- 実軸上に1位の極を持つ有理関数 f に対して、(主値)積分

p.v. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$, p.v. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iax} dx$ を留数で計算する方法の紹介

反省 (授業では説明しないかも)

今回は、以下の命題の証明はスルーしてしまった¹。自力で解いた人がいたら、レポート受け付けます。

Ⓐ $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \frac{\sin x}{x} dx$ が収束する。つまり $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ は広義積分可能である。

Ⓑ $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ は発散する (広義積分は絶対収束しない、 $[0, \infty)$ で $\frac{\sin x}{x}$ は Lebesgue 可積分でない)。

Ⓒ $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ は連続で、 $c \in (a, b)$, $f(c) \neq 0$ とするとき、

$$\lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow +0} \left(\int_a^{c-\varepsilon_1} \frac{f(x)}{x-c} dx + \int_{c+\varepsilon_2}^b \frac{f(x)}{x-c} dx \right)$$

は収束しない。つまり $\int_a^b \frac{f(x)}{x-c} dx$ は広義積分可能でない。

¹この科目の目的は、複素関数の性質について述べることである。複素関数論の要素が含まれないものの、収束・発散については、授業中に必ずしも全部証明しようとは考えていない (本来は他の講義でやるべきこと)。

- [1] 神保道夫, 複素関数入門, 岩波書店 (2003) — 「複素関数」の教科書.
- [2] 一松信, 留数解析 — 留数による定積分と級数の計算, 共立出版 (1979).