応用複素関数レポート課題 A, B, C, $\cdots$

桂田 祐史

2020 年 6 月 16 日, 2020 年 7 月 29 日

はじめに

元々、応用複素関数では、レポート 50%, 期末試験 50% で成績評価することにしていた。対面形式の期末試験がなくなったため、その代わりとなるレポート課題 A, B, C, $\cdots$ を用意する。その中から 2 つを提出すること。それを期末試験の代わりとして評価する。

以下に見るように、主に授業中に詳しい説明を省略したものを説明するという内容が多いが、それ以外に自分で気になって調べたことをレポートしてもらっても良い。その場合は、事前に相談すること。

締め切りは 7 月 31 日とする (Oh-o! Meiji では、30 分の余裕を見て 8 月 1 日 0:30 を締め切りとする)。(2020/7/29 加筆: このようにアナウンスしたのですが、Oh-o! Meiji の方の設定を間違えて 8 月 8 日 0:30 としてしまいました。一度そうした締め切りを早く設定し直すのは良くないと思うので、8 月 8 日 0:30 まで提出されたものを受け取ることにします。)

(2020/7/8 加筆) 新型コロナウイルス感染症は、私が期待していたようには収まる気配を見せない。相変わらず登校するのは難しく、図書館へのアクセスもルール上は可能になったものの、とても勧められる状況ではない。ネットしか頼れるものがない場合、レポート課題をこなすのも難しい (自分自身が研究室においてある本をすぐには読めなくなって、支障を感じるようになってきて「これはマズい」と思いはじめました)。少し難易度を下げることに決めた。

とは言うものの、一応、数学関係の電子書籍はチェックして下さい。

「明治大学で読める数学関係の電子書籍」
`http://nalab.mind.meiji.ac.jp/ebook/`

課題 A

2020 年 5 月 13 日の講義の内容に関係して広義積分についての内容 (関数論というよりも微積分の問題)。

(1) $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_0^R \frac{\sin x}{x}dx$ が収束することを示せ。

(2) $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_0^R \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ が発散することを示せ。

課題 B

2020 年 5 月 20 日の講義のスライド (6/15) 定理の (3) の公式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{in\theta} = -\sum_{c\ \text{は}\ f\ \text{の極}} \mathrm{Res}\left(f(z)s_3(x)e^{iz\theta}; c\right) \quad (\theta \in [0, 2\pi])$$

を証明せよ。s_3 の不等式評価まで含めて省略せずに書くこと。

(講義ノートや一松 [2] にもある程度の説明があるが、詳しいことは省略されているので、そこを自力で埋めることになる。)

課題 C

$\displaystyle\int_0^{\pi} \log(\sin\theta)d\theta$ の値を複素積分を利用して求めよ。(これは有名な問題である。)

ネットでも見つかるはずと思うんだけど…探しにくいかも知れないので、課題 G というのも出します。

課題 D

2020 年 6 月 3 日の講義のスライド (12/16) 1 次分数変換の鏡像の原理を証明せよ。講義に書いた「証明のあらすじ」以外の方針で証明しても構わない。ただし、講義で説明していないことはすべてレポートに書くこと。

課題 E

2020 年 6 月 3 日の講義のスライド (15/16) 単位円盤の等角写像を与える定理を証明せよ。Schwarz の補題を使うことになると思われる。その証明もレポートすること。

課題 F

2020 年 6 月 10 日の講義で紹介した応力テンソルの対称性と、公式 $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{n}) = P\boldsymbol{n}$ (10/27) を証明せよ。

以下、7 月 8 日に加えたもの。

課題 G

授業で説明した定理を適用するだけでは求めることの出来ない、留数定理を利用する定積分計算の問題を 1 つ取り上げ、説明せよ。課題 C のレポートを提出する人はこちらを解くのは遠慮して下さい。

課題 H

Riemann のゼータ関数

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\quad (\operatorname{Re}s>-1,\ \text{ただし } n^s=e^{s\log n})$$

の正の偶数での値は

$$\zeta(2m)=-\frac{b_{2m}}{2}$$

である。ただし b_n は $\pi z\cot(\pi z)$ の 0 の周りの Taylor 展開の n 次の係数である (つまり $\pi z\cot(\pi z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n$)。この事実の証明を 2 年秋学期の「複素関数」の内容を知っている学生向けに書け。

つまり「複素関数」に含まれている内容は証明せずに使って良いが、そうでないものは証明を書く、ということである。桂田 [1] には、一応書いてあるが、必要なことがあちこちに分散していて、結構分かりにくい (つい最近、人に説明する機会があって「使いにくい」と感じた)。それを手短にまとめてみなさい、ということである。[1] ならば、図書館に行く必要はないから。

課題 I

次のいずれかから、1 つ選んで解け。

(1) $\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への双正則写像は 1 次分数変換に限ることを示せ。

(2) 上半平面を単位円盤に写す 1 次分数変換の一般形は

$$w=\alpha\frac{z-\beta}{z-\overline{\beta}},\quad |\alpha|=1,\quad \operatorname{Im}\beta>0$$

であることを示せ。

(3) 単連結領域 $\Omega\subsetneqq\mathbb{C}$ と $z_0\in\Omega$ に対して、双正則写像 $\varphi\colon\Omega\to D(0;1)$ で、$\varphi(z_0)=0$ と $\varphi'(z_0)>0$ を満たすものは 1 つしかないことを示せ。

(課題 D, E を解く場合は、この問題は避けて下さい。)

課題 J

Newton 流体では、応力テンソル P が

$$P=(-p+\lambda\operatorname{div}\boldsymbol{v})I+2\mu E$$

を満たす。このとき

$$\operatorname{div}P=-\nabla p+\mu\,\triangle\,\boldsymbol{v}+(\lambda+\mu)\,\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v})$$

であることを示せ。

この問題ならば、時間をかければ出来るのでは…

課題 K

$\mathbb{R}^2$ の開集合 Ω で定義された C^1 級の関数 $F\colon \Omega \to \mathbb{R}$ の等高線において、$\operatorname{grad} F$ が法線方向を表すことを説明せよ。

これは常識だと思うのだけど「知らなかった」と言う人が結構いるようなので、それなら他人に説明できるレベルまで勉強して理解することは有意義と考えた。

課題 L

この科目では、「Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題は解が存在する」、として講義をしているが、それが成り立つためには、領域 Ω や境界値 g にある程度の条件をおくのが普通である (まったくの無条件では成り立たない)。きちんと条件が書いてある定理を見つけてレポートせよ。条件を自分で理解するまで解読すれば良く、必ずしも証明自体をレポートする必要はない (証明まできちんと出来たら S 評価になるだろうけれど)。

課題 M

Weyl の定理 (7 月 15 日の講義参照) の証明を文献で探して、読んで理解してレポートせよ。

参考文献

[1] 桂田 祐史, 応用複素関数,「応用複素関数」の講義ノート (2015〜), http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/zoku-complex-function.pdf

[2] 一松信, 留数解析 — 留数による定積分と級数の計算, 共立出版 (1979).