

# 応用複素関数レポート課題2

桂田 祐史

2020年7月1日, 7月8日

- 数字のついているレポート課題は3つ出す予定で、必ずしもこの課題2を解かなくても良いですが、比較的解きやすいので、チャレンジすることを勧めます。
- 締め切りは7月22日(水曜)です (Oh-o! Meiji ではおまけして 7/23 0:30 とする)。
- 提出方法は Oh-o! Meiji.  
もし容量制限に引っかかった場合は、早目にメール (アドレスは katurada あっとまーく meiji.ac.jp) で相談して下さい。
- 使用するプログラミング言語は、自分の MacBook で実行して見せることが可能なものであればなんでも可。  
(本課題は、FreeFem++ によるサンプル・プログラムを提供しているので、FreeFem++ を採用するのが簡単でしょう。)
- プログラムとその実行結果、実行するための情報を含めること。
- FreeFem++ の使い方については、

- FreeFEM-documentation.pdf (公式ドキュメント)  
FreeFem++ をインストールしたのならば、

```
/usr/local/ff++/share/FreeFEM/FreeFEM-documentation.pdf
```

にあるはず。ターミナルから

```
open /usr/local/ff++/share/FreeFEM/FreeFEM-documentation.pdf
```

とすれば読める。

- 「FreeFem++ノート」<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/text/freefem-note/>  
— 桂田の自分用メモ

## 課題2

2次元渦無し非圧縮流の定常流で、流体の占める領域  $\Omega$  と、その境界  $\Gamma = \partial\Omega$  での流速の法線成分  $v_n := \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  が分かっている場合に、速度ポテンシャル  $\phi$ 、流れ関数  $\psi$  を計算して、等ポテンシャル線、流線、速度場を可視化せよ。領域  $\Omega$  と境界値 (流速の法線成分)  $v_n$  は、自分で興味のあるもの、自分の都合の良いものを選んで良い (後の注意を読んでおくこと)。

$\phi$  は、ポテンシャル問題

- (1) 
$$\Delta \phi = 0 \quad (\text{in } \Omega)$$
- (2) 
$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = v_n \quad (\text{on } \Gamma)$$

の解である。

ポテンシャル問題 (1), (2) を解いて、等ポテンシャル線と速度場  $\mathbf{v}$  を求めるサンプル・プログラム potential2d-v0.edp を公開してある。

ターミナルで次のようにして入手する

```
curl -O http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/potential2d-v0.edp
```

大筋は、 $\Omega$  と  $v_n$  を自分が決めたものにするようにプログラムを書き換えれば良い。(弱形式は変更する必要がない。)

流線の書き方には色々なやり方がある(一つくらいノーヒントの間を入れておくことにする)。選んだ問題によっては、分かりやすい図が描けるように調整が必要な場合もある。

## 注意

- (1)  $v_n := \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  は  $\int_{\Gamma} v_n d\sigma = 0$  を満たしている必要がある。実際、Gauss の発散定理と非圧縮性の仮定から

$$\int_{\Gamma} v_n d\sigma = \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} 0 d\mathbf{x} = 0.$$

サンプルプログラムでは、円盤領域  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ , 一様流  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  であったので、

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + 2y$$

としてある。  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  であるから、当然  $\int_{\Gamma} v_n d\sigma = 0$  も成り立つ。

- (2) 湧き出しや吸い込み、点渦など、特異点が  $\Omega$  内にあるような問題は、この方法では解くことが出来ない。

```

1 // potential2d-v0.edp
2 // http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2/potential2d-v0.edp
3 // 2次元非圧縮ポテンシャル流
4 // 速度ポテンシャル, 速度を求め, 等ポテンシャル線, 速度場を描く
5
6 border Gamma(t=0,2*pi) { x = cos(t); y = sin(t); } // 円盤領域
7 int m=40;
8 mesh Th=buildmesh(Gamma(m));
9 plot(Th, wait=1, ps="Th.eps");
10 // 次の2行は区分1次多項式を使うという意味
11 fespace Vh(Th,P1);
12 Vh phi, v, v1, v2;
13 // 境界条件の設定
14 func Vn=x+2*y; // Ωが単位円で, V=(1,2) のとき  $V \cdot n = x + 2y$ 
15
16 // 速度ポテンシャルφを求め, その等高線(等ポテンシャル線)を描く
17 solve Laplace(phi,v) =
18   int2d(Th)(dx(phi)*dx(v)+dy(phi)*dy(v)) -int1d(Th,Gamma)(Vn*v);
19 plot(phi,ps="contourpotential.eps",wait=1);
20
21 // ベクトル場 (v1,v2)=∇φ を描く (ちょっと雑なやり方)
22 v1=dx(phi); v2=dy(phi);
23 plot([v1,v2],ps="vectorfield.eps",wait=1);
24
25 // 等ポテンシャル線とベクトル場を同時に描く
26 plot([v1,v2],phi,ps="both.eps", wait=1);

```

- 6行目で領域  $\Omega$  の境界  $\Gamma$  を指定している。
- 8行目で、 $\Gamma$  を  $m$  分割して、 $\Gamma$  の囲む範囲を三角形分割して、それを mesh 型の変数 Th に代入している。
- 11行目、有限要素空間  $V_h$  を区分的1次関数の空間と定義している。この辺についてはこの講義では説明を省略する(知りたい人は有限要素法のテキストを読んで下さい)。
- 12行目、 $\phi$  と試験関数  $v$ , 流速ベクトル場  $\mathbf{v}$  の成分  $v_1, v_2$  を、Vh の要素とする。
- 14行目、境界条件の設定をしている。ここでは  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = x + 2y$  とする理由は上に書いた。
- 17~18行目、弱形式の定義。ここを修正する必要性が生じる可能性は低い。