

応用複素関数 第12回

～ 数値積分 (3) ～

かつらだ まさし
桂田 祐史

2020年7月29日

- 1 本日の内容・連絡事項
- 2 数値積分 (続き)
 - 関数論を用いた数値積分の誤差解析 (続き)
 - 無限区間の台形公式 I_h の誤差の特性関数
 - 無限区間の台形公式 I_h の誤差解析
- 3 参考文献
- 4 講義を終えるにあたって

- 講義内容: \mathbb{R} 上の解析関数の積分に対する台形公式 I_h の誤差解析
- レポートについて
 - レポート課題3 締め切り 8月1日 (提出は8月2日 0:30)
注意 レポート課題1, 2を提出した人は提出する必要はない。
 - 期末レポート課題 ("レポート課題ABC") 締め切り 7月31日と宣言したつもりで、そう書いてあるところもありますが、Oh-o! Meiji で8月8日 0:30となっていました (設定し間違えました)。今さら Oh-o! Meiji の方を7月31日に訂正はしませんが、出来れば7月中に提出してもらえると嬉しいです。
- 当初シラバスに載せていた「佐藤超関数」は、12回分オンデマンド講義には入れられなかったもので、とりあえず PDF 資料

「佐藤超関数の紹介」 [▶ Link](#)

を紹介しておく。期末レポートの採点が終了次第、動画を作成する予定である。

前回の復習: 高橋・森の関数論を用いた数値積分公式の誤差解析

$$(1) \quad I = \int_a^b f(x)p(x) dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z)\Psi(z) dz,$$

$$(2) \quad I_n = \sum_{k=1}^n f(x_k)w_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z)\Psi_n(z) dz,$$

$$(3) \quad I - I_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z)\Phi_n(z) dz.$$

ただし

$$(4) \quad \Psi(z) := \int_a^b \frac{p(x)}{z-x} dx,$$

$$(5) \quad \Psi_n(z) := \sum_{k=1}^n \frac{w_k}{z-x_k},$$

$$(6) \quad \Phi_n(z) := \Psi(z) - \Psi_n(z).$$

Ψ_n を数値積分公式の**特性関数**, Φ_n を数値積分公式の**誤差の特性関数**という。

無限区間の台形公式 l_h の誤差の特性関数 (1)

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

に対する台形公式 (ただし無限和バージョン)

$$l_h = h \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nh)$$

の特性関数はどうなるだろうか？ (前回は積分区間が有界区間 (a, b) である場合の数値積分公式を調べた。それとは随分様子が違っている。)

$x_n = nh$, $w_n = h$ ($n \in \mathbb{Z}$) だから、積分公式の特性関数は形式的には

$$\Psi_h(z) \stackrel{?}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{w_n}{z - x_n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{h}{z - nh}.$$

これは見覚えがある。これは収束しないが、次のように修正すれば良い。

$$\Psi_h(z) := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \frac{h}{z - nh} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \frac{1}{(z/h) - n} = \pi \cot \frac{\pi z}{h}$$

無限区間の台形公式 I_h の誤差の特性関数 (2)

一方、 Ψ については、有界区間 (a, b) の場合の $\text{Log} \frac{z-a}{z-b}$ の極限

$$\Psi(z) = \lim_{R \rightarrow \infty} \text{Log} \frac{z - (-R)}{z - R} = \begin{cases} -i\pi & (\text{Im } z > 0) \\ +i\pi & (\text{Im } z < 0) \end{cases}$$

を採用すると良い。実際、このとき次式が成り立つ。

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_c} f(z) \Psi(z) dz$$

ただし c は正の数で、 $\Gamma_c := \Gamma_c^- - \Gamma_c^+$, $\Gamma_c^-: z = x - ic$ ($x \in \mathbb{R}$), $\Gamma_c^+: z = x + ic$ ($x \in \mathbb{R}$). f は $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < d\}$, $d > c$ で正則と仮定する。

$$I - I_h = \int_{\Gamma_c} f(z) \Phi_h(z) dz, \quad \Phi_h(z) := \Psi(z) - \Psi_h(z).$$

誤差の特性関数 $|\Phi_h(z)|$ ($h = 1/2, 1/4$) の等高線を描いてみる (次のスライド)。実軸から離れるにつれ、急速に減衰することが分かる。

無限区間の台形公式 I_h の誤差の特性関数 (3)

$$\Psi_h(z) := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \frac{h}{z - nh} = \pi \cot \frac{\pi z}{h},$$

$$\Psi(z) := \lim_{R \rightarrow \infty} \operatorname{Log} \frac{z - (-R)}{z - R} = \begin{cases} -i\pi & (\operatorname{Im} z > 0) \\ +i\pi & (\operatorname{Im} z < 0) \end{cases},$$

$$\Phi_h(z) := \Psi(z) - \Psi_h(z).$$

数値積分を離れて、 $\pi \cot \pi z$ が実軸から離れるとどうなるかを描いたと考えると興味深い (後で式変形で示すことになります)。

```
Clear[PhiH,Psi,PsiH,NN,n,h]
Psi[z_] = If[Im[z]>0,-Pi I, Pi I]
PsiH[z_, h_] = Pi Cot[Pi z/h]
PhiH[z_, h_] = Psi[z] - PsiH[z, h]
g1=ContourPlot[Log10[Abs[PhiH[x + I y, 1/2]]], {x, -4, 4}, {y, -4, 4},
  Contours->9, ContourLabels -> True,
  ColorFunction -> (Hue[#] &), PlotLegends -> Automatic]
g2=ContourPlot[Log10[Abs[PhiH[x + I y, 1/4]]], {x, -4, 4}, {y, -4, 4},
  Contours->6, ContourLabels -> True, WorkingPrecision->100,
  ColorFunction -> (Hue[#] &), PlotLegends -> Automatic]
```

無限区間の台形公式 I_h の誤差の特性関数 (4)

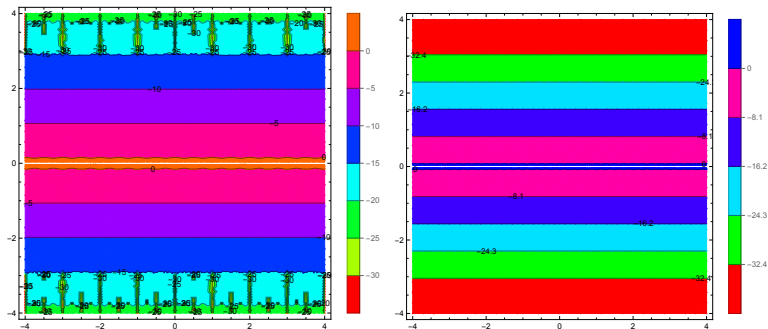


Figure: 台形公式 I_h の誤差の特性関数の絶対値 (左 $h = \frac{1}{2}$, 右 $h = \frac{1}{4}$)

$h = 1/2$ の場合に、グラフがあれいているのは、桁落ちして不十分な計算精度になっているためである。 $h = 1/4$ の場合は、演算精度を 100 桁に上げて計算している。

無限区間の台形公式 I_h の誤差解析 (1)

関数 f の積分 $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ に対して、数値積分公式 (台形公式)

$$I_h := h \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nh)$$

の誤差を評価する定理 (Stenger [3]) を紹介する。

f について仮定をおく。

Ⓐ 正の数 d に対して、 f は $\{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im} z| < d\}$ で正則

Ⓑ $\Lambda(f, c) := \int_{-\infty}^{\infty} (|f(x + ic)| + |f(x - ic)|) dx < \infty$ ($c \in (0, d)$).

$\Lambda(f, d - 0) := \lim_{c \rightarrow d-0} \Lambda(f, c)$ は有限確定

Ⓒ $c \in (0, d)$ に対して、 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \int_{-c}^c |f(x + iy) dy| = 0$.

無限区間の台形公式 I_h の誤差解析 (2)

$c \in (0, d)$, $h > 0$, $N \in \mathbb{N}$ を固定して、4 点

$$\pm(N + 1/2)h - ci, \quad \pm(N + 1/2)h + ci$$

を頂点とする長方形の周を正の向きに一周する曲線を $C_{c,N}$ とする。

$$\varphi(z) := \cot \frac{\pi z}{h} = \frac{\cos(\pi z/h)}{\sin(\pi z/h)}$$

の極は kh ($k \in \mathbb{Z}$), 位数はすべて 1, 留数は

$$\operatorname{Res}(\varphi; kh) = \frac{\cos(\pi z/h)}{(\sin(\pi z/h))'} \Big|_{z=kh} = \frac{h}{\pi}.$$

留数定理により

$$\int_{C_{c,N}} f(z) \cot \frac{\pi z}{h} dz = 2\pi i \sum_{k=-N}^N f(kh) \operatorname{Res}(\varphi; kh) = 2ih \sum_{k=-N}^N f(kh).$$

ゆえに

$$h \sum_{k=-N}^N f(kh) = \frac{1}{2i} \int_{C_{c,N}} f(z) \cot \frac{\pi z}{h} dz.$$

無限区間の台形公式 I_h の誤差解析 (3)

$N \rightarrow \infty$ とすると

$$\begin{aligned} I_h &= h \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) \\ &= \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-f(x+ic) \cot \frac{\pi(x+ic)}{h} + f(x-ic) \cot \frac{\pi(x-ic)}{h} \right) dx. \end{aligned}$$

一方、Cauchy の積分定理より

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x+ic) dx = I, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x-ic) dx = I$$

であるから、

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (f(x+ic) + f(x-ic)) dx.$$

ゆえに (やや分かりにくい計算をするが)

$$I_h - I = \int_{-\infty}^{\infty} \left[f(x+ic) \frac{\exp \frac{2\pi i(x+ic)}{h}}{1 - \exp \frac{2\pi i(x+ic)}{h}} - f(x-ic) \frac{\exp \frac{-2\pi i(x-ic)}{h}}{1 - \exp \frac{-2\pi i(x-ic)}{h}} \right] dx.$$

無限区間の台形公式 I_h の誤差解析 (4)

$$\left| \frac{\exp \frac{2\pi i(x+ic)}{h}}{1 - \exp \frac{2\pi i(x+ic)}{h}} \right|, \left| \frac{\exp \frac{-2\pi i(x-ic)}{h}}{1 - \exp \frac{-2\pi i(x-ic)}{h}} \right| \leq \frac{e^{-2\pi c/h}}{1 - e^{-2\pi c/h}}$$

が成り立つ。ゆえに

$$\begin{aligned} |I_h - I| &\leq \frac{\exp(-2\pi c/h)}{1 - \exp(-2\pi c/h)} \int_{-\infty}^{\infty} (|f(x+ic)| + |f(x-ic)|) dx \\ &= \frac{\exp(-2\pi c/h)}{1 - \exp(-2\pi c/h)} \Lambda(f, c). \end{aligned}$$

$c \rightarrow d - 0$ とすると

$$(7) \quad |I_h - I| \leq \frac{\exp(-2\pi d/h)}{1 - \exp(-2\pi d/h)} \Lambda(f, d - 0).$$

を得る。

$h \rightarrow +0$ のとき、分子が指数関数的に減衰する。

□

参考文献

当初予定では、杉原 [5] による DE 公式の誤差解析を紹介する予定であったが、時間の制約から、Stenger [3] の定理を紹介することにとどめた。DE 公式にしても、台形公式にしても、後から出版された杉原・室田 [6] が最初に参照すべきテキストである。



高橋秀俊, 森正武, 解析関数の数値積分の誤差の新しい評価法, 数理解析研究所講究録, Vol. 91, pp. 119–141 (1970), <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/0091-04.pdf>.



Takahasi, H. and Mori, M., Error estimation in the numerical integration of analytic functions, Rep. Comput. Centre Univ. Tokyo, Vol. 3, pp. 41–08 (1970).



F. Stenger, Integration formula based on the trapezoidal formula, Journal of the Institute of Mathematics and Its Applications, Vol. 12, No. 1, pp. 103–114 (1973).



Takahashi, H. and Mori, M., Double exponential formulas for numerical integration, Publ. RIMS Kyoto Univ., Vol. 9, pp. 721–741 (1974).



杉原 正顕, DE 変換公式の最適性について, 京都大学数理解析研究所講究録, 585 巻, pp. 150–175 (1986).



杉原 正顕, 室田 一雄, 数値計算法の数理, 岩波書店 (1994).

講義を終えるにあたって

お疲れ様。レポートを提出した後は、良い夏休みが迎えられるように。